FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

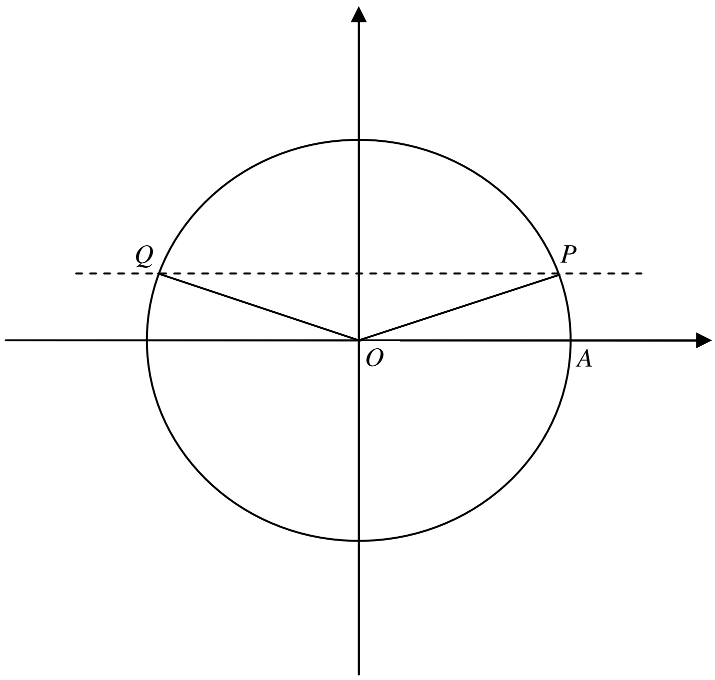
ed applicazione alla risoluzione di equazioni goniometriche

~~~~~~~~~~~~~

1. LE EQUAZIONI "sen $x = a$" E "cos $x = a$"

È noto che, fissato un qualsiasi numero reale a compreso tra -1 ed 1 (estremi inclusi), esistono infiniti angoli per i quali il seno oppure il coseno sia uguale ad a. In alcuni casi particolari questi angoli possono essere scritti esplicitamente come multipli razionali di π, ma nel caso generale non ci si può aspettare che le soluzioni siano esprimibile tramite angli "noti".

Consideriamo ad esempio l'equazione $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$: essa ammette infinite soluzioni, che però non sono multipli razionali dell'angolo piatto. Per esprimere le soluzioni, affrontiamo dapprima il problema da un punto di vista geometrico. Tracciamo allora la circonferenza goniometrica, quindi (ricordando il significato geometrico della funzione seno), intersechiamo la circonferenza con la retta di equazione $y = \frac{1}{3}$:

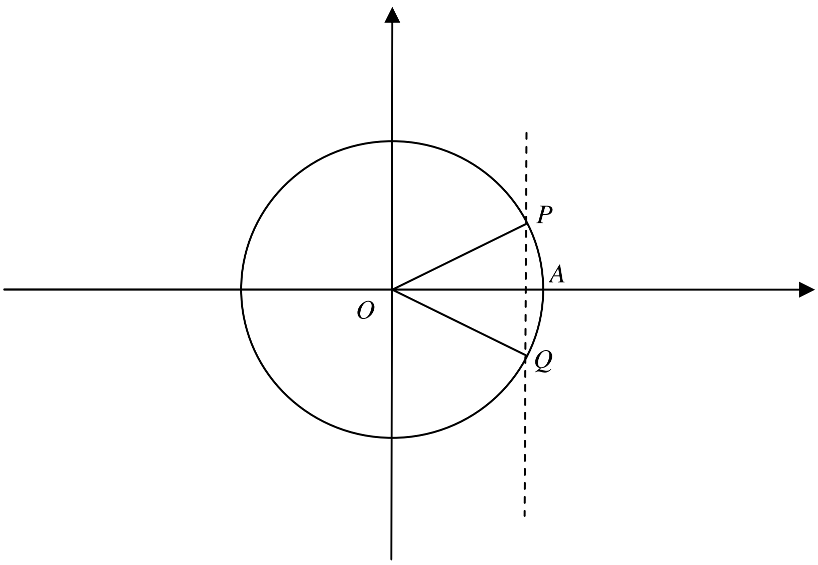


La retta interseca la circonferenza nei due punti $P = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ e $Q = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$; tali punti individuano i due angoli $A\hat{O}P$ e $A\hat{O}Q$, che sono appunto le soluzioni cercate nell'ambito dell'intervallo $[0\ ,\ 2\pi]$. Allora, se indichiamo con α l'unico angolo del primo quadrante il cui seno vale $\frac{1}{3}$ (cioè appunto l'angolo $A\hat{O}P$ detto sopra), è chiaro che, per le regole degli angoli associati, l'angolo $A\hat{O}Q$ è il supplementare di $A\hat{O}P$, pertanto potremo indicarlo con $\pi - \alpha$. Ricordando poi che la funzione seno è periodica con periodo 2π, tutte le soluzioni dell'equazione potranno essere espresse come segue:
~~~~~~~~~~~~~

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi. \end{cases} \quad [1] \qquad (1.1)$$

In maniera analoga ci si potrà regolare per un'equazione come $\operatorname{sen} x = -\frac{4}{5}$: intersecando la circonferenza goniometrica con la retta di equazione $y = -\frac{4}{5}$, si trovano i punti $P = \left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ e $Q = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$, cosicché questa volta abbiamo due "soluzioni base" dell'equazione, una nel terso quadrante ed una nel quarto. Ora, un angolo del quarto quadrante si può esprimere in diversi modi: possiamo ad esempio considerare $A\hat{O}P$ come un angolo compreso tra $\frac{3}{2}\pi$ e 2π, oppure volendo lo possiamo anche immaginare come un angolo negativo, compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e 0 (come dire che si immagina il raggio vettore *OP* che ruota dalla posizione iniziale in senso orario). Per il momento, possiamo considerare indifferente la scelta dell'angolo base: se indichiamo con α un angolo $A\hat{O}P$ individuato secondo uno dei modi detti sopra (oppure secondo uno degli infiniti modi possibili), la formula $x = \alpha + 2k\pi$ darà una famiglia di soluzioni dell'equazione data. Per individuare poi l'angolo $A\hat{O}Q$, basterà considerare che comunque vale la formula $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$, per cui l'altra famiglia di soluzioni sarà $\pi - \alpha + 2k\pi$, esattamente come scritto nella (1.1).

Analoghe considerazioni valgono per l'equazione $\cos x = a$, sempre con un a compreso tra -1 ed 1, anzi, si può dire che in questo caso la situazione sia più semplice, nel senso che possiamo utilizzare un'unica espressione per indicare tutte le soluzioni. Consideriamo ad esempio l'equazione $\cos x = \frac{8}{9}$; per risolverla geometricamente, dobbiamo intersecare la circonferenza goniometrica con la retta di equazione $x = \frac{8}{9}$:



[1] Adottiamo qui la solita convenzione per la quale, scrivendo "$k\pi$" intendiamo che k è un numero intero (positivo, negativo o nullo). Si osservi che, per eccesso di precisione, nella (1.1) dovremmo scrivere $x = \alpha + 2k_1\pi$ e $x = \pi - \alpha + 2k_2\pi$; ma in generale si potrà fare a meno di utilizzare simboli diversi, intendendo comunque che k è un generico numero intero.

Anche qui vi sono due soluzioni in ciascun intervallo di ampiezza uguale ad un periodo; se indichiamo con α l'angolo $A\hat{O}P$, cioè l'unico angolo del primo quadrante il cui coseno è $\frac{8}{9}$, una famiglia di soluzioni è $x = \alpha + 2k\pi$; ora, possiamo esprimere $A\hat{O}Q$ come $2\pi - \alpha$, e quindi scrivere l'altra famiglia di soluzioni come $x = 2\pi - \alpha + 2k\pi$, ma più semplicemente possiamo osservare che angoli opposti hanno lo stesso coseno. Perciò possiamo esprimere l'altra "soluzione base" come $-\alpha$; in conclusione, un'espressione unica che contiene tutte le soluzioni è

$$x = \pm\alpha + 2k\pi^{(2)}. \tag{1.2}$$

2. LE FUNZIONI ARCOSENO ED ARCOCOSENO

Ora introduciamo delle opportune funzioni che esprimano in modo opportuno gli angoli soluzioni delle equazioni viste nel paragrafo precedente, angoli che prima abbiamo indicato semplicemente con α.

Dato un numero x compreso tra -1 ed 1, sembrerebbe naturale definire l'**arcoseno** di x come "l'angolo il cui seno è x"; si capisce però che tale definizione è ambigua, in quanto, come abbiamo già osservato, esistono **infiniti** angoli aventi come seno il numero dato. Occorre perciò dare una definizione univoca di arcoseno, da utilizzare poi per esprimere tutte le infinite soluzioni dell'equazione.

In un certo senso, la situazione è simile a quella della definizione di radice quadrata (o di altra radice ad indice pari) di un numero positivo. Stabilito che in ogni caso nel campo reale non ha senso la radice quadrata di un numero negativo, e che l'unico numero che al quadrato dà 0 è 0, rimane il fatto che per un numero positivo x non è corretto dire che la radice quadrata è "il numero il cui quadrato è x", perché esistono sempre due numeri reali distinti (uno opposto dell'altro) il cui quadrato è x. Allora, per convenzione si usa indicare con $\sqrt{x}$ il solo numero **positivo** il cui quadrato è x: ad esempio, con il simbolo $\sqrt{49}$ si indica soltanto 7 (e non ± 7, perché una funzione deve fornire un solo valore). Questo non contraddice il fatto che le soluzioni dell'equazione $x^2 = 49$ siano $+7$ e -7 (e quindi scriviamo brevemente $x_{1,2} = \pm 7$): infatti un'equazione può avere più soluzioni (anche infinite), mentre una funzione deve far corrispondere ad x **un solo** valore $f(x)$.

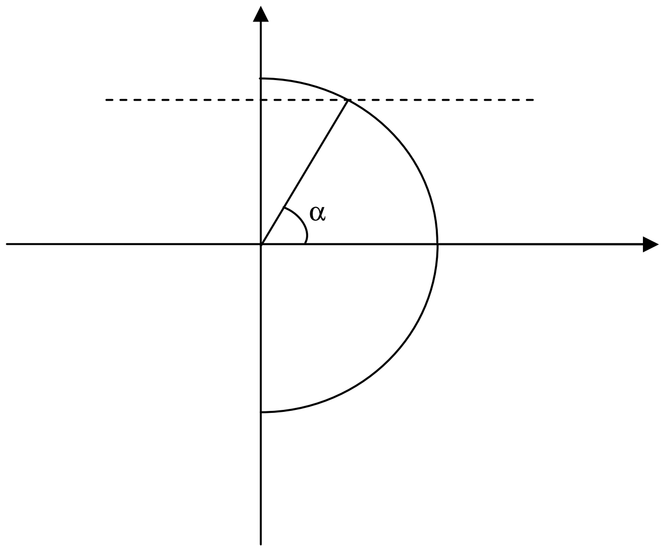
Dunque, per definire in modo corretto la funzione arcoseno, occorre per prima cosa fissare un intervallo nel quale la funzione seno assuma una ed una sola volta i valori compresi tra -1 ed 1. Ciò si può fare in infiniti modi, ma è uso comune scegliere l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Si osservi infatti (volendo la cosa si può visualizzare con un disegno) che in $-\frac{\pi}{2}$ il seno vale -1, al crescere dell'angolo da $-\frac{\pi}{2}$ a 0 il seno assume tutti i possibili valori reali tra -1 e 0, poi simmetricamente al crescere dell'angolo da 0 a $\frac{\pi}{2}$ il seno copre tutto l'intervallo $[0\ ,\ 1]$. Possiamo dare allora per la funzione arcoseno la seguente definizione:

---

[2] Volendo, sarebbe possibile anche per l'equazione sen $x = a$ dare un'espressione unica, che comprenda tutte le soluzioni scritte nella (1.1): basta scrivere infatti $x = (-1)^k\alpha + k\pi$. Per convincersi dell'equivalenza di tale espressione con la (1.1), si osservi che ad esempio per $k = 0$ l'espressione scritta sopra dà α, per $k = 1$ dà $\pi - \alpha$, per $k = 2$ dà $2\pi + \alpha$, e così via. Tuttavia, nelle applicazioni (quando ad esempio è necessario individuare le soluzioni di un'equazione che cadono in un certo intervallo), di l'espressione $x = (-1)^k\alpha + k\pi$ è piuttosto scomoda, perciò continueremo ad utilizzare la (1.1).

DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE ARCOSENO. Dato un qualunque numero x compreso tra -1 ed 1 (estremi inclusi), si dice ***arcoseno*** del numero x (e si indica con arcsen x), l'**unico** angolo α compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ tale che sen α è uguale ad x.

Perciò poniamo arcsen $x = \alpha$ se risulta sen $\alpha = x$, ma con la limitazione $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Da un punto di vista geometrico, determinare l'arcoseno di un numero a equivale a considerare l'unica intersezione tra la retta di equazione $y = a$ e la semicirconferenza goniometrica giacente nel semipiano delle ascisse non negative. Se a è positivo l'intersezione cade nel primo quadrante, ed in tal caso considereremo come arcoseno di a l'angolo α acuto come in figura, contato nel verso positivo. Se invece a è negativo l'intersezione cade nel quarto quadrante, ed in tal caso l'arcoseno di a è l'angolo α acuto contato nel verso negativo.



Sulla base di quanto detto sopra, abbiamo ad esempio:

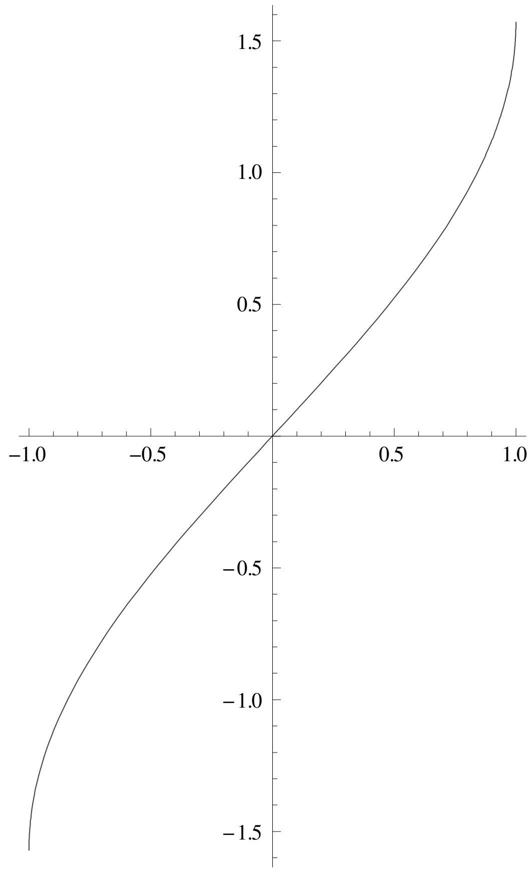
$\text{arcsen}\, 0 = 0$; $\text{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\text{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\text{arcsen}\, 1 = \frac{\pi}{2}$;

$\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$; $\text{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$,

mentre ad esempio sarebbe errato scrivere $\text{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$: è vero che $\text{sen}\frac{5\pi}{6}$ è uguale a $\frac{1}{2}$, ma per definire $\text{arcsen}\frac{1}{2}$ si considera, tra gli infiniti angoli aventi seno uguale a $\frac{1}{2}$, l'unico che giace tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, cioè appunto $\frac{\pi}{6}$.

Grazie alle proprietà della funzione seno, è facile rendersi conto del fatto che per ogni $x \in [-1\,,\,1]$ si ha $\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen}\, x$; cioè, l'arcoseno è una funzione dispari.

La figura che segue mostra il grafico della funzione arcoseno:



Ora, grazie all'introduzione della funzione arcoseno, siamo in grado di esprimere le soluzioni dell'equazione sen $x = a$. Ad esempio, si consideri di nuovo l'equazione $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$: l'angolo che nel par. 1 abbiamo indicato con α, cioè l'unico angolo del primo quadrante avente seno uguale a $\frac{1}{3}$, si può esprimere come $\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}$; perciò, seguendo quanto detto prima, possiamo esprimere tutte le soluzioni come segue:

$$\begin{cases} x = \operatorname{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi \\ x = \pi - \operatorname{arcsen}\frac{1}{3} + 2k\pi. \end{cases} \tag{2.1}$$

Per a negativo la situazione è simile. Si debba risolvere ad esempio l'equazione $\operatorname{sen} x = -\frac{2}{7}$: L'unico angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ il cui seno è $-\frac{2}{7}$ si può indicare con $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{2}{7}\right)$, che è anche uguale a $-\operatorname{arcsen}\frac{2}{7}$, ed è compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e 0. Come abbiamo osservato prima, nell'ambito di un periodo c'è un altra soluzione, che cade nel terzo quadrante. Possiamo indicare tale angolo con $\pi - \operatorname{arcsen}\left(-\frac{2}{7}\right)$, che è come dire $\pi + \operatorname{arcsen}\frac{2}{7}$. In conclusione, tutte le soluzioni dell'equazione data sono:

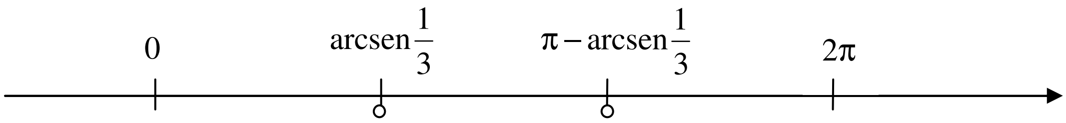
$$\begin{cases} x = -\mathrm{arcsen}\dfrac{2}{7} + 2k\pi \\ x = \pi + \mathrm{arcsen}\dfrac{2}{7} + 2k\pi. \end{cases}$$

Un esercizio molto utile (che poi come si vedrà è molto importante nello studio delle funzioni goniometriche), consiste nel selezionare, tra le infinite soluzioni di una data equazione goniometrica, quelle che cadono in un intervallo assegnato. Ad esempio, prima abbiamo espresso le soluzione dell'equazione $\mathrm{sen}\,x = \frac{1}{3}$ tramite la (2.1). Supponiamo di voler individuare le sole radici dell'equazione che cadono nell'intervallo $[0\ ,\ 2\pi]$; geometricamente, è come dire che partiamo dal punto A $(1\ ;\ 0)$ e facciamo un intero giro della circonferenza in senso antiorario, osservando quali sono gli angoli soluzioni dell'equazione, ed in quale ordine vengono trovati. In questo caso la soluzione è molto semplice: abbiamo, nell'ordine, un angolo nel primo quadrante, che è $\mathrm{arcsen}\frac{1}{3}$, e un altro nel secondo quadrante, che è $\pi - \mathrm{arcsen}\frac{1}{3}$; come dire che in ciascuna delle espressioni (2.1) abbiamo scelto il valore $k = 0$.

Di solito è utile sapere quali sono i valori approssimati delle soluzioni così individuate. Utilizzando una comune calcolatrice scientifica, otteniamo facilmente i valori (approssimati a 4 cifre decimali):

$$\mathrm{arcsen}\frac{1}{3} \cong 0.3398\,; \qquad \pi - \mathrm{arcsen}\frac{1}{3} \cong 2.8018 \text{ [3]},$$

e quindi lo schema



dove abbiamo indicato con un pallino vuoto il fatto che l'equazione presenta una radice nel punto in questione (invece 0 e 2π servono solo per delimitare l'intervallo nel quale abbiamo tracciato le soluzioni).

Nel caso dell'equazione $\mathrm{sen}\,x = -\frac{2}{7}$ la scelta dei valori di k è leggermente diversa. Supponiamo infatti di dover individuare, nell'ambito delle espressioni (2.2), le sole radici dell'equazione che cadono in $[0\ ,\ 2\pi]$. Se partiamo da 0 e percorriamo la circonferenza in senso antiorario, la prima soluzione che incontriamo si trova nel terzo quadrante, ed è $\pi + \mathrm{arcsen}\frac{2}{7}$, circa uguale a 3.4313; successivamente, troviamo un'altra soluzione nel quarto quadrante. Si potrebbe naturalmente pensare di esprimere tale soluzione con $-\mathrm{arcsen}\frac{2}{7}$, ma tale scrittura sarebbe errata, in

---

[3] Di solito, le calcolatrici scientifiche danno i valori approssimati delle funzioni goniometriche utilizzando diverse scale per gli angoli (radianti, sessagesimali con parte decimale, centesimali). Il lettore è invitato a fare molta attenzione, perché di solito in Analisi Matematica si intende che per il calcolo delle funzioni goniometriche e delle loro inverse gli angoli sono sempre misurati in radianti.

quanto l'angolo $-\text{arcsen}\frac{2}{7}$, pur essendo una delle infinite soluzioni dell'equazione, non cade nell'intervallo $[0\ ,\ 2\pi]$. Invece la soluzione corretta è l'angolo appena detto incrementato di un angolo giro, cioè $2\pi-\text{arcsen}\frac{2}{7}$, circa uguale a 5.9934. In altre parole, per trovare le soluzioni in $[0\ ,\ 2\pi]$ abbiamo dovuto scegliere nella prima espressione di (2.2) $k = 1$, e nella seconda $k = 0$.

Riassumendo, per $a \in (0\ ,\ 1)$, si potranno esprimere le soluzioni dell'equazione sen $x = a$ come segue:

$$\begin{cases} x = \text{arcsen}\,a + 2k\pi \\ x = \pi - \text{arcsen}\,a + 2k\pi, \end{cases} \tag{2.3}$$

mentre per $a \in (-1\ ,\ 0)$, si potrà scrivere ad esempio

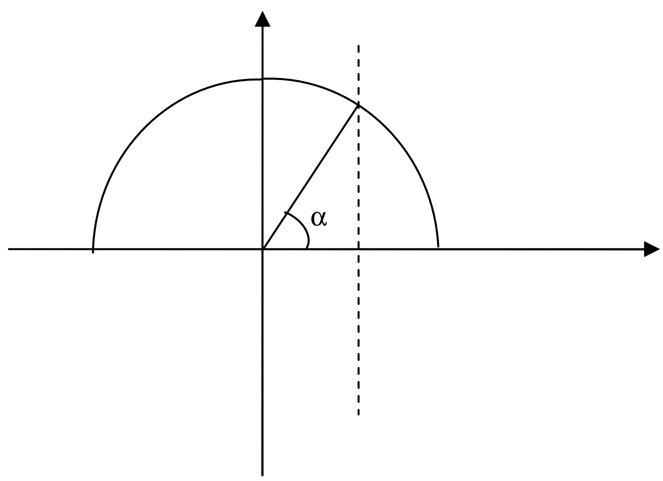
$$\begin{cases} x = -\text{arcsen}\,|\,a\,| + 2k\pi \\ x = \pi + \text{arcsen}\,|\,a\,| + 2k\pi, \end{cases} \tag{2.4}$$

facendo però attenzione alla scelta di k se occorre determinare le soluzioni che cadono in un determinato intervallo.

In modo analogo, definiamo la funzione arcocoseno; osserviamo che anche qui l'argomento x deve essere compreso tra -1 ed 1 (estremi inclusi), visto che anche il coseno è compreso tra tali limiti. Questa volta però fissiamo per la variabilità dell'angolo α l'intervallo $[0\ ,\ \pi]$, perché in questo intervallo la funzione coseno assume una ed una sola volta tutti i valori tra -1 ed 1. Abbiamo allora la seguente definizione:

DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE ARCOCOSENO. Dato un qualunque numero x compreso tra -1 ed 1 (estremi inclusi), si dice ***arcocoseno*** del numero x (e si indica con arccos x), l'**unico** angolo α compreso tra 0 e π tale che cos α è uguale ad x.

Perciò abbiamo arccos $x = \alpha$ se cos $\alpha = x$, ma con la limitazione $0 \leq \alpha \leq \pi$. Anche qui possiamo dare un'interpretazione geometrica: per determinare l'arcocoseno di un numero a, consideriamo l'unica intersezione tra la retta di equazione $x = a$ e la semicirconferenza goniometrica giacente nel semipiano delle ordinate non negative. Se a è positivo l'intersezione cade nel primo quadrante, ed in tal caso arccos a è un angolo acuto; se invece a è negativo l'intersezione cade nel secondo quadrante, ed in tal caso arccos a è un angolo ottuso.

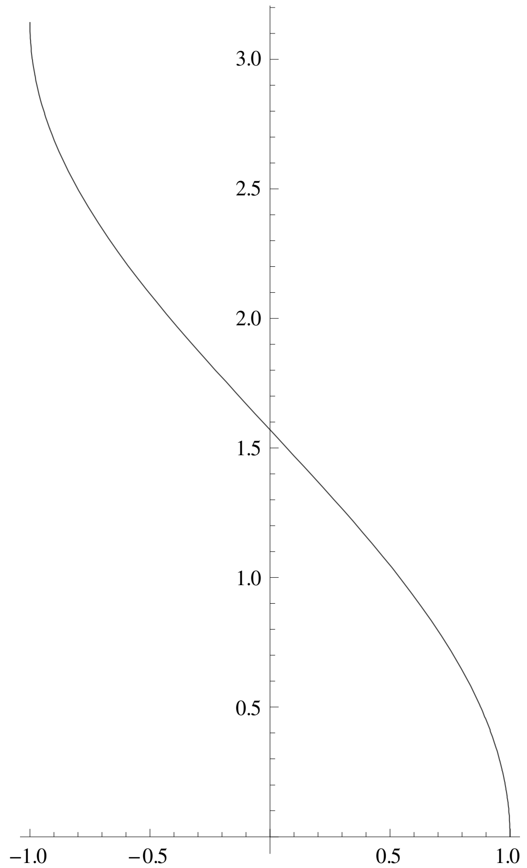


Perciò abbiamo i seguenti risultati:

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}\,; \qquad \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}\,; \qquad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\,; \qquad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}\,; \qquad \arccos 1 = 0\,;$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\,; \qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}\,, \qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}\,; \qquad \arccos(-1) = \pi\,,$$

mentre ad esempio scritture come arccos $1 = 2\pi$ o $\arccos(-1) = -\pi$ sono errate, in quanto gli angoli trovati non cadono tra 0 e 2π. La figura seguente mostra il grafico della funzione arcocoseno.



Si osservi anche che, a differenza di quanto accade per l'arcoseno, ad argomento *minore* corrisponde risultato *maggiore*: la funzione arcocoseno assume il suo valore minimo (che è 0) per $x = 1$, ma per x minore di 1 assume valori via via maggiori, fino a raggiungere il suo massimo (cioè π) per $x = -1$.

Un'altra importante differenza tra arcoseno e arcocoseno è che quest'ultima funzione non è né pari né dispari: di conseguenza, un'espressione come $\arccos(-a)$ non può essere scritta in modo più semplice[4].

Vediamo allora come si esprimono le soluzioni dell'equazione $\cos x = a$. Consideriamo ad esempio l'equazione $\cos x = \frac{8}{9}$: sulla base di quanto detto alla fine del par. 1, tutte le soluzioni si possono esprimere tramite la formula

$$x = \pm\arccos\frac{8}{9} + 2k\pi\,. \tag{2.5}$$

---

[4] Volendo, per $0 < a < 1$ si potrebbe scrivere $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, ma di solito non è una scelta conveniente.

Nel caso che occorra scrivere le soluzioni dell'equazione giacenti tra 0 e 2π, occorre considerare che la (2.5) è semplicemente un modo abbreviato di scrivere *due* famiglie di soluzioni, cioè $x = \arccos\frac{8}{9} + 2k\pi$ e $x = -\arccos\frac{8}{9} + 2k\pi$: partendo come al solito dal punto A = (1 ; 0) e percorrendo la circonferenza goniometrica in senso antiorario, troviamo nel primo quadrante l'angolo $\arccos\frac{8}{9} \cong 0.4759$, e successivamente nel quarto quadrante l'angolo $2\pi - \arccos\frac{8}{9} \cong 5.8073$ (come dire che nel secondo caso è necessario scegliere il valore k = 1). Il procedimento non cambia per l'equazione $\cos x = a$ con a negativo; ad esempio, le soluzioni dell'equazione $\cos x = -\frac{1}{5}$ si possono esprimere con la formula $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2k\pi$. Partendo da A e percorrendo la circonferenza, incontriamo nel secondo quadrante la soluzione $\arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \cong 1.7722$ e nel terzo quadrante la soluzione $2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \cong 4.511$.

Riassumendo, per $a \in (-1 , 1)$, le soluzioni dell'equazione $\cos x = a$ sono:

$$x = \pm\arccos a + 2k\pi. \tag{2.6}$$

Vediamo ora altri esempi di equazioni goniometriche le cui soluzioni possono essere espresse tramite arcsen e arccos.

ESEMPIO 1. Risolvere l'equazione goniometrica $6\text{sen}\, x \cos x - 2\text{sen}\, x + 9\cos x - 3 = 0$, e scrivere esplicitamente le soluzioni che cadono in $[0 , 2\pi]$.

SOLUZIONE. Mediante un semplice raccoglimento parziale, l'equazione si trasforma in

$$(2 \text{ sen } x + 3)(3 \cos x - 1) = 0,$$

da cui $\text{sen}\, x = -\frac{3}{2}$ oppure $\cos x = \frac{1}{3}$. La prima equazione ovviamente non ha soluzioni reali, mentre dalla seconda abbiamo $x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2k\pi$. Le soluzioni che cadono tra 0 e 2π sono $\arccos\frac{1}{3} \cong 1.231$ e $2\pi - \arccos\frac{1}{3} \cong 5.0522$.

ESEMPIO 2. Risolvere l'equazione goniometrica $19\text{sen}\, x + 3\cos x - 9 = 0$, e scrivere esplicitamente le soluzioni che cadono in $[0 , 2\pi]$.

SOLUZIONE. Si tratta di un'equazione lineare in seno e coseno, che può essere risolta ad esempio tramite l'applicazione delle note formule razionali in $\text{tg}\frac{x}{2}$. Abbiamo infatti:

$$19\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+3\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}-9=0,$$

da cui $6t^2 - 19t + 3 = 0$, se poniamo $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Ora, le soluzioni di questa equazione di secondo grado sono $t_1=\frac{1}{6}$ e $t_2=3$. Per trovare x potremmo utilizzare la funzione arcotangente (che vedremo in seguito), ma possiamo anche ragionare come segue: se $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{6}$, possiamo facilmente trovare sen x e cos x applicando ancora le formule razionali in $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$; otteniamo infatti:

$$\mathrm{sen}\,x=2\frac{\frac{1}{6}}{1+\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{12}{37};\qquad \cos x=\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{35}{37},$$

il che significa che x giace nel primo quadrante: esso può essere espresso indifferentemente come $\mathrm{arcsen}\frac{12}{37}$ oppure come $\arccos\frac{35}{37}$. Applicando lo stesso procedimento al caso $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=3$, otteniamo invece $\mathrm{sen}\,x=\frac{3}{5}$ e $\cos x=-\frac{4}{5}$; ora, l'angolo α che ha tali funzioni goniometriche non può essere espresso come $\mathrm{arcsen}\frac{3}{5}$, perché α giace nel primo quadrante, mentre l'angolo che stiamo cercando giace nel secondo. Il problema si risolve semplicemente considerando l'angolo $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$; perciò tutte le soluzioni dell'equazione sono $x=\mathrm{arcsen}\frac{12}{37}+2k\pi$ e $x=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)+2k\pi$, e tra queste ce ne sono due che cadono tra 0 e 2π, cioè $\mathrm{arcsen}\frac{12}{37}\cong 0.3303$ e $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\cong 2.4981$.

Esiste anche un altro procedimento per la risoluzione di equazioni lineari in seno e coseno, che consiste nell'interpretazione grafica dell'equazione, o meglio di un sistema ad essa equivalente. Riprendiamo ancora la stessa equazione lineare; se poniamo $\mathrm{sen}x = Y$ e $\cos x = X$ (il che si giustifica ricordando la definizione delle funzioni seno e coseno), l'equazione diventa $19Y + 3X - 9 = 0$, che è in due variabili. Basta però ricordare la relazione fondamentale della goniometria, grazie alla quale è sempre $X^2 + Y^2 = 1$; in conclusione, l'equazione data è equivalente al sistema

$$\begin{cases}19Y+3X-9=0\\ X^2+Y^2=1,\end{cases}$$

che dal punto di vista della geometria analitica non è altro che l'intersezione tra una retta ed una circonferenza. Le soluzioni di questo sistema sono $\left(\frac{35}{37},\frac{12}{37}\right)$ e $\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$, per cui troviamo facilmente le stesse soluzioni di prima.

Il vantaggio di questo procedimento sta non solo nel fatto che otteniamo direttamente seno e coseno degli angoli in questione senza passare per la tangente di $\frac{x}{2}$, ma anche nel fatto che in questo modo determiniamo anche le soluzioni che potrebbero sfuggire applicando le formule razionali ricordate sopra. Si consideri infatti ad esempio l'equazione $7\text{sen}\, x - 4\cos x - 4 = 0$; applicando le formule in $\text{tg}\frac{x}{2}$ troviamo $7\frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} - 4\frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} - 4 = 0$, da cui $7\text{tg}\frac{x}{2} - 4 = 0$. Da $\text{tg}\frac{x}{2} = \frac{4}{7}$ troviamo $\text{sen}\, x = \frac{56}{65}$ e $\cos x = \frac{33}{65}$, per cui possiamo scrivere $x = \arcsin\frac{56}{65} + 2k\pi$ (o anche, indifferentemente, $x = \arccos\frac{33}{65} + 2k\pi$), ma questa espressione non esaurisce tutte le soluzioni dell'equazione data. In effetti, occorre ricordare che le formule in $\text{tg}\frac{x}{2}$ non sono valide per $x = \pi$ (più in generale, non sono valide nei multipli dispari dell'angolo piatto), perché $\text{tg}\frac{\pi}{2}$ non esiste. La soluzione "mancante" (perché il grado dell'equazione è solo 1 anziché 2) è proprio π, perciò alle soluzioni trovate prima dobbiamo aggiungere $x = \pi + 2k\pi$[5]. Ora, applicando il secondo procedimento, il problema non si pone, perché il punto $(-1\ ;\ 0)$ è un punto come un altro, e non va trattato a parte. In effetti, il sistema $\begin{cases} 7Y - 4X - 4 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ ammette le due soluzioni $\left(\frac{33}{65}, \frac{56}{65}\right)$ e $(-1\ ,\ 0)$, che corrispondono alle soluzioni trovate prima.

Gli esempi precedenti ci danno lo spunto per fissare alcune regole su come esprimere correttamente un angolo di cui siano noti seno e coseno. Consideriamo allora due numeri reali a e b, tali che la somma dei loro quadrati sia 1 (evitiamo il caso in cui uno di essi sia nullo e l'altro uguale a ± 1), e scriviamo il sistema

$$\begin{cases} \text{sen}\, x = a \\ \cos x = b. \end{cases} \tag{2.7}$$

Ragionando da un punto di vista geometrico, è evidente che il sistema (2.7) presenta una ed una sola soluzione in ogni intervallo di ampiezza pari ad un periodo, perché $(a\ ;\ b)$ è un ben preciso punto sulla circonferenza goniometrica. Naturalmente, l'espressione esplicita dell'angolo x dipende dall'intervallo nel quale si decide di far variare x; nel seguito vediamo i casi più comuni.

- Se $a > 0$ e $b > 0$, l'angolo x giace nel primo quadrante. Se (come è la scelta più ovvia in questo caso) supponiamo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, possiamo esprimere x indifferentemente come arcsen a oppure come arccos b. Ad esempio, se $\text{sen}\, x = \frac{8}{17}$ e $\cos x = \frac{15}{17}$, possiamo scrivere $x = \arcsin\frac{8}{17}$ oppure $x = \arccos\frac{15}{17}$.

---

[5] La stessa situazione si verifica se si applicano le formule suddette ad equazioni in seno e coseno di grado ≥ 2. Ad esempio, partendo da un'equazione di secondo grado in seno e coseno si ottiene in generale un'equazione di quarto grado in $t = \text{tg}\frac{x}{2}$; se però l'equazione si abbassa di grado, vuol dire che essa ha anche le soluzioni $x = \pi + 2k\pi$.

- Se $a > 0$ e $b < 0$, l'angolo x giace nel secondo quadrante. Se supponiamo $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, dobbiamo esprimere x come arccos b; si osservi che in questo caso è errata la scrittura x = arcsen a, perché in ogni caso l'arcoseno non può dare un angolo del secondo quadrante. Volendo, si potrebbe anche scrivere $x = \pi - \operatorname{arcsen} a$, che però è meno comodo. Ad esempio, se $\operatorname{sen} x = \frac{3}{7}$ e $\cos x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$, scriviamo $x = \arccos\left(-\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)$, oppure anche $x = \pi - \operatorname{arcsen}\frac{3}{17}$.

- Se $a < 0$ e $b > 0$, l'angolo x giace nel quarto quadrante. Se supponiamo $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, consideriamo che la funzione arcoseno per un argomento negativo dà proprio un angolo compreso in tale intervallo, perciò possiamo scrivere x = arcsen a. Ad esempio, se $\operatorname{sen} x = -\frac{9}{41}$ e $\cos x = \frac{40}{41}$, abbiamo $x = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{9}{41}\right)$, che, grazie alla disparità della funzione seno, si può anche scrivere $x = -\operatorname{arcsen}\frac{9}{41}$. In alternativa, si può anche scrivere $x = -\arccos\frac{40}{41}$. Però in alcuni casi (come si è visto negli esempi precedenti) si richiede di determinare l'angolo nell'intervallo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$; in tal caso, basterà scrivere $x = 2\pi - \operatorname{arcsen}\frac{9}{41}$, oppure $x = 2\pi - \arccos\frac{40}{41}$.

- Infine, se $a < 0$ e $b < 0$, l'angolo x giace nel terzo quadrante, ed in tal caso non esiste nessuna funzione goniometrica inversa che fornisca direttamente l'angolo desiderato. Possiamo allora esprimere x tramite il seguente ragionamento. Supponiamo dapprima $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$; se incrementiamo x di un angolo piatto, troviamo un angolo compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, il quale, ricordando le regole sugli angoli associati, avrà seno e coseno opposti dei numeri a e b assegnati, perciò si potrà esprimere come arcsen($-a$) oppure come arccos($-b$). Se quindi sottraiamo π, ritroviamo l'angolo x richiesto. Ad esempio, sia $\operatorname{sen} x = -\frac{24}{25}$ e $\cos x = -\frac{7}{25}$, e sia $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$. L'angolo $x + \pi$ giace tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, ed ha seno uguale a $\frac{24}{25}$ e coseno uguale a $\frac{7}{25}$, perciò può essere espresso ad esempio come $\operatorname{arcsen}\frac{24}{25}$. In conclusione, abbiamo $x = \operatorname{arcsen}\frac{24}{25} - \pi$. Se invece dobbiamo esprimere x come angolo compreso tra π e $\frac{3\pi}{2}$, il ragionamento è lo stesso (cioè ci si riconduce sempre al primo quadrante), ma alla fine π va sommato anziché sottratto (nell'esempio precedente, abbiamo $x = \pi + \operatorname{arcsen}\frac{24}{25}$, che è lo stesso angolo trovato prima incrementato di un angolo giro).

ESEMPIO 3. Confrontare i due angoli $\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{1}{4}$ e $\beta = \arccos\frac{1}{5}$.

SOLUZIONE. Spesso in questo tipo di esercizi si ricorre alla calcolatrice per determinare i valori approssimati degli angoli. Qui vogliamo vedere un procedimento "manuale", che presuppone un ragionamento sulle proprietà delle funzioni goniometriche, e tutt'al più utilizziamo la calcolatrice solo per avere conferma del risultato. I due angoli α e β giacciono entrambi nel primo quadrante, ma in questo caso è molto facile stabilire quale dei due precede l'altro, perché è sufficiente un confronto con angoli noti. Essendo $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, l'angolo α è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{6}$, mentre da $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ deduciamo $\frac{\pi}{3} < \beta < \frac{\pi}{2}$ (si ricordi che la funzione coseno è decrescente nel primo quadrante!). In conclusione si ha $\alpha < \beta$.

ESEMPIO 4. Confrontare i due angoli $\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{12}{25}$ e $\beta = \arccos\frac{22}{25}$.

SOLUZIONE. Questa volta il ragionamento applicato prima ci dice solo che i due angoli sono compresi tra 0 e $\frac{\pi}{6}$, essendo $\frac{12}{25} < \frac{1}{2}$ e $\frac{22}{25} > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Di solito, esercizi di questo tipo possono essere risolti calcolando una stessa funzione goniometrica dei due angoli, per poi applicare le proprietà di monotonia della funzione scelta. In questo caso la scelta più semplice è calcolare il seno di β:

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{22}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{141}}{25}.$$

Ora, è ovvio che $\frac{\sqrt{141}}{25}$ è minore di $\frac{12}{25}$ (perché $12^2 = 144 > 141$). Poiché nel primo quadrante il seno è una funzione crescente, concludiamo che α è maggiore di β. Con la calcolatrice abbiamo la conferma del risultato ottenuto:

$$\operatorname{arcsen}\frac{12}{25} \cong 0.5007\,; \qquad \arccos\frac{22}{25} \cong 0.4949\,.$$

ESEMPIO 5. Esprimere tramite arcoseno ed arcocoseno i due angoli $\alpha = 2\operatorname{arcsen}\frac{9}{41}$ e $\beta = 4\arccos\frac{8}{17}$.

SOLUZIONE. In realtà, α e β sono già espressi tramite le funzioni arcsen ed arccos, ma qui si intende dire che desideriamo un'espressione di α e β in termini di tali funzioni, senza i multipli 2 e 4 (ciò consente un più facile confronto tra gli angoli).

Possiamo procedere così: per prima cosa, indichiamo con γ l'angolo $\operatorname{arcsen}\frac{9}{41}$, per cui è $\alpha = 2\gamma$. Ora, sappiamo che γ è l'angolo del primo quadrante il cui seno è $\frac{9}{41}$, e da ciò calcoliamo facilmente $\cos\gamma = \frac{40}{41}$. Applicando le formule di duplicazione, troviamo:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}2\gamma = 2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma = 2 \cdot \frac{9}{41} \cdot \frac{40}{41} = \frac{720}{1681}\,;$$
$$\cos\alpha = \cos 2\gamma = \cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma = \frac{1600}{1681} - \frac{1681}{1681} = \frac{1519}{1681}\,.$$

Da questi calcoli concludiamo che anche α giace nel primo quadrante, pertanto potremo esprimerlo come $\operatorname{arcsen}\frac{720}{1681}$ oppure come $\arccos\frac{1519}{1681}$. La verifica con la calcolatrice (approssimando stavolta i risultati a 10 cifre decimali) dà:

$$2\operatorname{arcsen}\frac{9}{41}\cong 0.4426288847\,; \qquad \operatorname{arcsen}\frac{720}{1681}\cong 0.4426288847\,.$$

In modo analogo, se indichiamo con δ l'angolo $\arccos\frac{8}{17}$, possiamo calcolare $\operatorname{sen}\delta=\frac{15}{17}$, quindi ottenere le funzioni goniometriche di $\beta = 4\delta$ applicando due volte le formule di duplicazione. Abbiamo infatti:

$$\operatorname{sen}2\delta = 2\cdot\frac{15}{17}\cdot\frac{8}{17}=\frac{240}{289}\,;$$
$$\cos 2\delta = \frac{64}{289}-\frac{225}{289}=-\frac{161}{289}\,;$$
$$\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}4\delta = 2\cdot\frac{240}{289}\cdot\left(-\frac{161}{289}\right)=-\frac{77280}{83521}\,;$$
$$\cos\beta=\cos4\delta=\left(-\frac{161}{289}\right)^2-\left(\frac{240}{289}\right)^2=-\frac{31679}{83521},$$

il che significa che β giace nel terzo quadrante; essendo ovviamente β compreso tra π e $\frac{3\pi}{2}$ (non può essere diversamente, visto che è il quadruplo di un angolo acuto), seguendo quanto detto in precedenza potremo esprimerlo come $\pi+\operatorname{arcsen}\frac{77280}{83521}$. La verifica con la calcolatrice dà:

$$4\arccos\frac{8}{17}\cong 4.323356002\,; \qquad \pi+\operatorname{arcsen}\frac{77280}{83521}\cong 4.323356002\,.$$

ESEMPIO 6. Calcolare $\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}+\operatorname{arcsen}\frac{12}{13}$.

SOLUZIONE. Anche qui si intende dire che desideriamo trovare un'espressione dell'angolo dato tramite l'uso di una sola funzione goniometrica. Per risolvere questo problema, indichiamo rispettivamente con α e β gli angoli $\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}$ e $\operatorname{arcsen}\frac{12}{13}$, e scriviamo per ciascuno di essi seno e coseno:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}\,; \qquad \cos\alpha=\frac{4}{5}\,;$$
$$\operatorname{sen}\beta=\frac{12}{13}\,; \qquad \cos\beta=\frac{5}{13}\,.$$

Applicando le formule di addizione, troviamo:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{63}{65};$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{16}{65},$$

per cui l'angolo $\alpha + \beta$ (che giace nel secondo quadrante), si potrà esprimere come $\arccos\left(-\frac{16}{65}\right)$. La verifica con la calcolatrice dà:

$$\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}+\operatorname{arcsen}\frac{12}{13}\cong 1.819506316;$$
$$\arccos\left(-\frac{16}{65}\right)\cong 1.819506316.$$

ESEMPIO 7. Calcolare $\frac{\pi}{6}+\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}+\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{6}}{6}$.

SOLUZIONE. È un esercizio simile al precedente, anche se più complicato nei dettagli. Sia $\alpha=\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\beta=\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{6}}{6}$; sappiamo che $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, e possiamo facilmente calcolare seno e coseno di α e β:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3};\qquad \cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3};$$
$$\operatorname{sen}\beta=\frac{\sqrt{6}}{6};\qquad \cos\beta=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Se ora poniamo $\gamma=\frac{\pi}{6}+\alpha$, troviamo:

$$\operatorname{sen}\gamma=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3+\sqrt{6}}{6};$$
$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}.$$

Poiché l'angolo richiesto è $\gamma + \beta$, troviamo infine:

$$\operatorname{sen}(\gamma+\beta)=\frac{3+\sqrt{6}}{6}\frac{\sqrt{30}}{6}+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{3\sqrt{30}+6\sqrt{5}+6\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{36};$$
$$\cos(\gamma+\beta)=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}\frac{\sqrt{30}}{6}-\frac{3+\sqrt{6}}{6}\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}{12}.$$

Poiché questi numeri sono entrambi positivi, l'angolo si trova nel primo quadrante, pertanto potremo esprimerlo come $\operatorname{arcsen}\frac{3\sqrt{30}+6\sqrt{5}+6\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{36}$.

ESEMPIO 7. Confrontare gli angoli $\alpha = \frac{\pi}{3} + \mathrm{arcsen}\frac{15}{17}$ e $\beta = 2\arccos\frac{16}{33}$.

SOLUZIONE. Sia per comodità $\gamma = \mathrm{arcsen}\frac{15}{17}$ e $\delta = \arccos\frac{16}{33}$. Per prima cosa, possiamo notare, semplicemente ragionando "ad occhio" che α e β giacciono nel secondo quadrante. Infatti, essendo $\frac{16}{33}$ poco meno di $\frac{1}{2}$, δ è poco più grande di $\frac{\pi}{3}$, per cui si ha $\frac{2\pi}{3} < \beta < \pi$. D'altra parte, essendo $\frac{15}{17} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ [6], anche γ è maggiore di $\frac{\pi}{3}$, perciò abbiamo $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$.

Dovendo confrontare angoli del secondo quadrante, possiamo risolvere il problema calcolando il coseno di entrambi. Notiamo allora che

$$\mathrm{sen}\gamma = \frac{15}{17}; \qquad \cos\gamma = \frac{8}{17};$$
$$\mathrm{sen}\delta = \frac{7\sqrt{17}}{33}; \qquad \cos\delta = \frac{16}{33},$$

perciò:

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) = \frac{1}{2}\frac{8}{17} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{15}{17} = \frac{8 - 15\sqrt{3}}{34};$$
$$\cos\beta = \cos 2\delta = \left(\frac{16}{33}\right)^2 - \left(\frac{7\sqrt{17}}{33}\right)^2 = -\frac{577}{1089}.$$

Poiché il confronto tra i valori assoluti di tali numeri dà $\frac{15\sqrt{3} - 8}{34} < \frac{577}{1089}$ [7], è $\cos\alpha > \cos\beta$; siccome poi la funzione coseno è decrescente nel secondo quadrante (in realtà lo è in tutto $[0, \pi]$), abbiamo $\alpha < \beta$. Infatti, si ha:

$$\frac{\pi}{3} + \mathrm{arcsen}\frac{15}{17} \cong 2.128036552; \qquad 2\arccos\frac{16}{33} \cong 2.129212814.$$

3. LE FUNZIONI ARCOTANGENTE ED ARCOCOTANGENTE

Considerazioni analoghe a quelle del par. 1 possono essere fatte per le due equazioni

$$\mathrm{tg}\, x = a; \tag{3.1}$$

$$\mathrm{cotg}\, x = a; \tag{3.2}$$

che sono equazioni più semplici di quelle analoghe in seno e coseno, in quanto:

---

[6] Infatti questa disuguaglianza equivale a $30 > 17\sqrt{3}$, a sua volta equivalente a $900 > 289 \cdot 3$.

[7] Questa è una verifica un po' meno semplice da fare manualmente, ma volendo è ancora possibile anche supponendo di utilizzare una calcolatrice capace di eseguire solo le quattro operazioni di base. Infatti, la disuguaglianza data equivale a $16335\sqrt{3} - 8712 < 19618$, cioè $3267\sqrt{3} < 5666$, che è vera, come si verifica subito elevando al quadrato entrambi i membri.

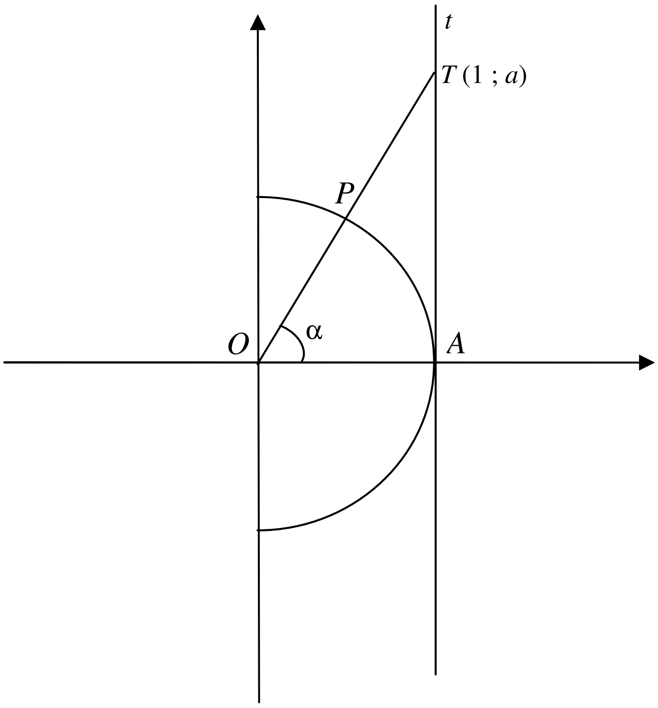
- le (3.1) e (3.2) hanno senso per *qualunque* valore di a, in quanto le funzioni tangente e cotangente assumono tutti i valori reali;
- una volta individuata una soluzione α dell'equazione in questione, considerando che le funzioni tg e cotg hanno periodo π, si potranno esprimere tutte le soluzioni con la semplice formula $x = \alpha + k\pi$.

Diamo allora le seguenti definizioni per le funzioni arcotangente ed arcocotangente:

DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE ARCOTANGENTE. Dato un qualunque numero reale x, si dice ***arcotangente*** del numero x (e si indica con arctg x), l'unico angolo α appartenente all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tale che tg α è uguale ad x.

Perciò poniamo arctg $x = \alpha$ se risulta tg $\alpha = x$, con la limitazione $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Dunque otteniamo una funzione che ha come dominio tutto **R** e come codominio l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (si osservi che l'intervallo è aperto perché non è possibile che risulti arctg $x = \frac{\pi}{2}$ oppure $-\frac{\pi}{2}$, in quanto per tali angoli la tangente non esiste).

Si può dare anche qui un'interpretazione geometrica: tracciata la semicirconferenza goniometrica giacente nel semipiano $x \geq 0$, sia t la retta tangente alla curva nel punto $A = (1\ ;\ 0)$, cioè la retta $x = 1$. Ora, per determinare l'arcotangente di un dato numero a, si tracci sulla retta t il punto T di ordinata a, e si unisca T con l'origine. detto P il punto di intersezione tra la



semiretta OP e la semicirconferenza, l'angolo $A\hat{O}P$ è l'arcotangente richiesta[8]. Si ha allora una situazione simile a quella della funzione arcoseno: se $a > 0$, il punto P giace nel primo quadrante,

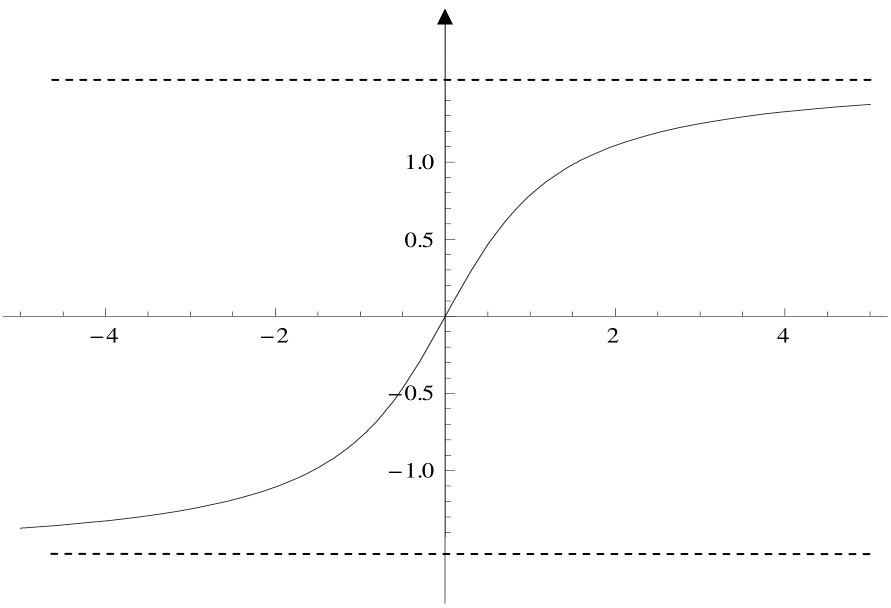
[8] Ovviamente sarebbe bastato dire che l'angolo richiesto è AOT; si è preferito considerare il punto AOP solo per uniformarsi alla consuetudine per la quale gli angoli si identificano con archi della circonferenza goniometrica.

per cui si avrà un angolo α compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ (l'unica differenza è che non si potrà mai ottenere $\frac{\pi}{2}$), mentre se $a < 0$ il punto P cade nel quarto quadrante, ed in tal caso sarà $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

La seguente tabella fornisce alcuni valori particolari della funzione arcotangente:

$\text{arctg}\ 0 = 0$;	$\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$;	$\text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$;	$\text{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$;
$\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;	$\text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$;	$\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$.	

Come accade per l'arcoseno, anche l'arcotangente è una funzione dispari, cioè si ha per ogni x reale $\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}\ x$. La figura che segue mostra il grafico della funzione arcotangente:



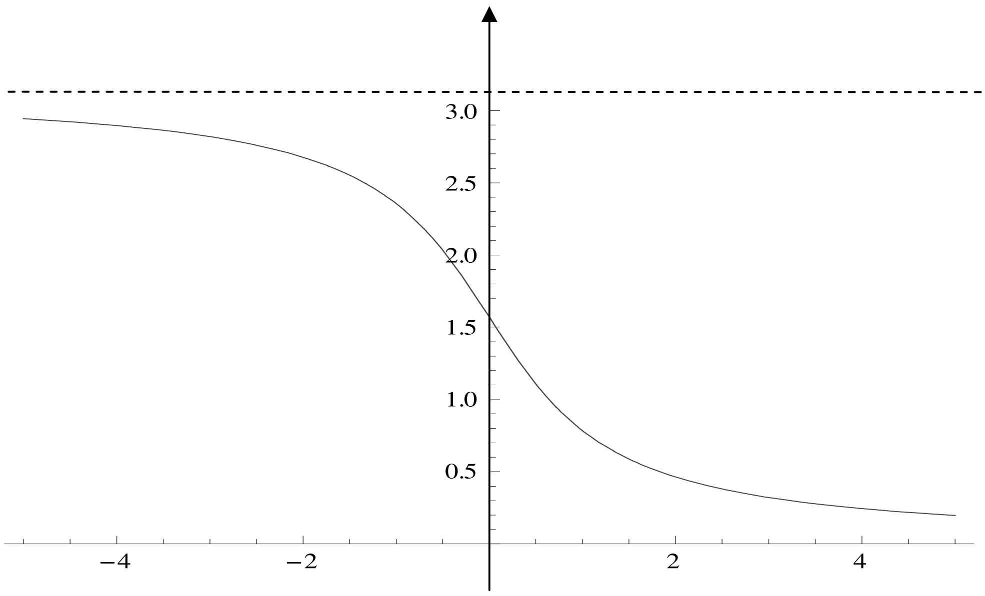
La funzione arctg x è crescente in tutto **R**, positiva per x positivo e negativa per x negativo. Il suo codominio è limitato, e siccome per x molto grande essa tende ad avvicinarsi a $\frac{\pi}{2}$ (mentre per x grande in modulo ma negativo essa si avvicina a $-\frac{\pi}{2}$), il grafico presenta due asintoti orizzontali, di equazioni rispettivamente $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$.

Come già detto, tramite la funzione arcotangente è molto semplice esprimere le soluzioni dell'equazione $\text{tg}\ x = a$: basterà scrivere $x = \text{arctg}\ a + k\pi$, e volendo utilizzare la disparità dell'arcotangente nel caso $a < 0$. Ad esempio, le soluzioni dell'equazione $\text{tg}\ x = 2$ sono date da $x = \text{arctg}\ 2 + k\pi$ (notare che sono due per ogni giro), mentre le soluzioni dell'equazione $\text{tg}\ x = -\frac{4}{5}$ si possono scrivere come $x = \text{arctg}\left(-\frac{4}{5}\right) + k\pi$ oppure come $x = -\text{arctg}\frac{4}{5} + k\pi$. Ovviamente occorre fare attenzione nel caso che si debbano selezionare le radici che cadono in un determinato intervallo, ad esempio $[0, 2\pi]$. Per la prima equazione, le radici in questione saranno arctg 2 e $\pi + \text{arctg } 2$ (come dire che per determinare gli angoli che cadono nel primo giro abbiamo scelto per k i valori 0 e 1), mentre per la seconda equazione le radici che ci interessano sono $\pi - \text{arctg}\frac{4}{5}$ e $2\pi - \text{arctg}\frac{4}{5}$ (perciò i valori di k da scegliere sono 1 e 2).

Infine, diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE ARCOCOTANGENTE. Dato un qualunque numero reale x, si dice ***arcocotangente*** del numero x (e si indica con arccotg x oppure arcctg x), l'unico angolo α appartenente a $(0 ; \pi)$ tale che cotg α è uguale ad x.

Vale per l'arcocotangente un'interpretazione geometrica analogo a quella vista sopra per l'arcotangente (il lettore potrà facilmente tracciare da sé il disegno). Per $x > 0$ l'arcocotangente giace nel primo quadrante, mentre per $x < 0$ giace nel secondo. Si osservi che, al pari della funzione arcocoseno, la funzione arcocotangente è decrescente in tutto il suo dominio, e inoltre che essa non è né pari né dispari, per cui un'espressione come arccotg(−4) non può essere resa più semplice. La figura che segue mostra il grafico della funzione arcocotangente:



Come si vede, anche qui sono presenti due asintoti orizzontali, di equazioni $y = 0$ e $y = \pi$. Comunque, non è il caso di insistere troppo sull'arcocotangente, perché di solito nelle applicazioni è più comodo ricondursi sempre alla tangente (anche perché le comuni calcolatrici scientifiche forniscono valori approssimati dell'arcotangente ma non dell'arcocotangente). A tale proposito, essendo $\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$ per ogni α diverso dai multipli interi di $\frac{\pi}{2}$, si potrebbe pensare di ricavare arccotg x calcolando l'arcotangente di $\frac{1}{x}$. In realtà la relazione $\text{arccotg} x = \text{arctg}\frac{1}{x}$ non è sempre vera; precisamente, si può dire che questa formula vale per $x > 0$; invece, per $x < 0$ dobbiamo tenere presente che arctg x ed $\text{arctg}\frac{1}{x}$ giacciono nel quarto quadrante, mentre arccotg x giace nel secondo. In effetti, ricordando le proprietà delle funzioni tangente e cotangente, non è difficile accorgersi che in questo caso i due angoli arccotg x ed $\text{arctg}\frac{1}{x}$ differiscono di un angolo piatto, per cui possiamo scrivere $\operatorname{arccotg} x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. Ad esempio, se l'argomento è $\frac{5}{4}$ possiamo scrivere $\operatorname{arccotg}\frac{5}{4} = \operatorname{arctg}\frac{4}{5}$, mentre se l'argomento è $-\frac{\sqrt{2}}{5}$ abbiamo $\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right) = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) =$ $= \pi - \operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

ESEMPIO 8. Risolvere l'equazione $\operatorname{tg}^2 x = 8$, e scrivere esplicitamente le soluzioni che cadono in [0 , 2π].

SOLUZIONE. Si ha ovviamente $\operatorname{tg} x = \pm 2\sqrt{2}$, e di conseguenza le due equazioni $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}$ e $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$. Le soluzioni della prima equazione sono $x = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} + k\pi$, quelle della seconda $x = -\operatorname{arctg} 2\sqrt{2} + k\pi$. Poiché ciascuna delle due equazioni presenta due soluzioni per ogni giro, si hanno tra 0 e 2π le seguenti soluzioni:

$$x = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}\,, \quad x = \pi - \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}\,, \quad x = \pi + \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}\,, \quad x = 2\pi - \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}\,.$$

ESEMPIO 9. Risolvere l'equazione $4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x - 3\cos^2 x = 0$, e scrivere esplicitamente le soluzioni che cadono in [0 , 2π].

SOLUZIONE. L'equazione data è omogenea in seno e coseno, cioè presenta a primo membro un polinomio che rispetto alle variabili sen x e cos x ha tutti i termini dello stesso grado. Come è noto, dopo aver effettuato un eventuale raccoglimento a fattor comune, l'equazione si risolve dividendo tutti i termini per la massima potenza di cos x (in questo caso $\cos^2 x$). Si ha allora:

$$4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0\,,$$

da cui le due equazioni $\operatorname{tg} x = -1$ e $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$. Perciò le soluzioni dell'equazione data sono $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ e $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + k\pi$. Le radici che cadono tra 0 e 2π sono:

$$x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\,, \quad x = \frac{3\pi}{4}\,, \quad x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\,, \quad x = \frac{7\pi}{4}\,.$$

ESEMPIO 10. Confrontare i due angoli $\alpha = \arccos\left(-\frac{5}{12}\right)$ e $\beta = 2\operatorname{arctg}\frac{14}{9}$.

SOLUZIONE. Per il primo angolo, abbiamo $\cos\alpha = -\frac{5}{12}$ (per adesso evitiamo di calcolare il seno, poi vediamo se serve), mentre per il secondo abbiamo $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{14}{9}$. Per calcolare le funzioni goniometriche di β, il procedimento più semplice è l'uso delle formule razionali in $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; infatti, utilizzando la formula relativa al coseno, abbiamo facilmente $\cos\beta = \frac{1-\left(\frac{14}{9}\right)^2}{1+\left(\frac{14}{9}\right)^2} = -\frac{115}{277}$. Dunque i due angoli sono entrambi nel secondo quadrante. Ora, confrontando i valori assoluti dei due coseni, abbiamo $\frac{115}{277} < \frac{5}{12}$; essendo quindi cos β > cos α, concludiamo che vale la disuguaglianza β < α. La verifica con la calcolatrice dà:

$$\arccos\left(-\frac{5}{12}\right) \cong 2.0006\,; \qquad 2\text{arctg}\frac{14}{9} \cong 1.9989\,.$$

ESEMPIO 11. Esprimere tramite arcoseno o arcocoseno i tre angoli $\alpha = \text{arctg}\frac{1}{5}$, $\beta = 2$ arctg 7, $\gamma = 4\text{arctg}\frac{1}{6}$.

SOLUZIONE. Sappiamo che vale la formula $\text{sen}x = \frac{\pm\,\text{tg}x}{\sqrt{1+\text{tg}^2 x}}$, dove il segno va scelto a seconda del quadrante in cui cade *x*. In particolare, se *x* giace nel primo quadrante è $\text{sen}x = \frac{\text{tg}x}{\sqrt{1+\text{tg}^2 x}}$. Perciò, per il primo angolo risulta $\text{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$. Siccome poi $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$, possiamo scrivere indifferentemente $\alpha = \text{arcsen}\frac{1}{\sqrt{26}}$ oppure $\alpha = \arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$. Per quanto riguarda il secondo angolo, abbiamo $\text{tg}\frac{\beta}{2} = 7$, e quindi, applicando le solite formule in $\text{tg}\frac{x}{2}$, abbiamo $\text{sen}\beta = \frac{7}{25}$ e $\cos\beta = -\frac{24}{25}$, da cui $\beta = \arccos\left(-\frac{24}{25}\right)$. Infine, per il terzo angolo, posto γ = 4δ, dove $\delta = \text{arctg}\frac{1}{6}$, possiamo dapprima applicare la formula di duplicazione della tangente per trovare $\text{tg}2\delta = \frac{2\cdot\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{12}{35}$. Siccome 2δ è uguale a $\frac{\gamma}{2}$, possiamo a questo punto applicare le formule in $\text{tg}\frac{x}{2}$ per trovare sen γ e cos γ. In realtà, è sufficiente calcolare solo sen γ, perché da $\text{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{12}{35} < 1$ deduciamo $0 < \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{4}$ e quindi $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Poiché risulta $\text{sen}\gamma = \frac{2\cdot\frac{12}{35}}{1+\left(\frac{12}{35}\right)^2} = \frac{840}{1369}$, concludiamo che γ si può esprimere come $\text{arcsen}\frac{840}{1369}$.

ESEMPIO 12. Risolvere l'equazione $3\text{sen}^2 x - \sqrt{3}\text{sen}x\cos x - \cos^2 x = \frac{5}{4}$, e scrivere esplicitamente le soluzioni che cadono in [0 , 2π].

SOLUZIONE. Questa volta l'equazione non è omogenea, tuttavia possiamo osservare che rispetto a sen *x* e cos *x* tutti i termini hanno grado pari (si intende dire che il termine noto ha grado 0, perciò anch'esso è di grado pari). In simili casi l'equazione è "riconducibile ad omogenea", perché con un semplice artificio di calcolo essa diventa omogenea. Se infatti moltiplichiamo il termine $\frac{5}{4}$ per $\text{sen}^2x + \cos^2x$, per poi portare tutti i termini a primo membro, troviamo:

$$\frac{7}{4}\operatorname{sen}^2 x-\sqrt{3}\operatorname{sen}x\cos x-\frac{9}{4}\cos^2 x=0\,,$$

che è un'equazione omogenea. Pertanto possiamo procedere come prima: moltiplicando per 4 e dividendo per $\cos^2 x$, troviamo

$$7\operatorname{tg}^2 x-4\sqrt{3}\operatorname{tg}x-9=0\,,$$

da cui le due equazioni $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ e $\operatorname{tg}x=-\frac{3\sqrt{3}}{7}$. Perciò le soluzioni dell'equazione data sono $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ e $x=-\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{7}+k\pi$. Le radici che cadono tra 0 e 2π sono:

$$x=\frac{\pi}{3},\quad x=\pi-\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{7},\quad x=\frac{4\pi}{3},\quad x=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{7}\,.$$

ESERCIZI

Risolvere le seguenti equazioni goniometriche:

1. $\operatorname{sen} x \cos 2x + 12\cos x \operatorname{sen} 2x = 0$

2. $82\operatorname{sen} x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 82\cos x \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 9 = 0$

3. $21\operatorname{sen} x + 9\cos 2x = 14$

4. $1 + 3\operatorname{sen} x \cos x(13\cos^2 x - 1) = 3\operatorname{sen}^2 2x + 25\cos^4 x$

5. $7\operatorname{sen} x + \sqrt{6}\cos x - 1 = 0$

6. $\operatorname{sen} x + 2\cos x + 1 = 0$

7. $15\operatorname{sen} x - 5\cos x + 9 = 0$

Esprimere i seguenti angoli tramite la funzione arcoseno, e calcolarne i valori approssimati a 4 cifre decimali:

8. $\arccos\frac{40}{41}$ **9.** $-\operatorname{arctg} 8$ **10.** $2\operatorname{arcsen}\frac{1}{6}$

11. $\arccos\left(-\frac{7}{25}\right)$ **12.** $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ **13.** $2\operatorname{arctg}\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

Esprimere i seguenti angoli tramite la funzione arcocoseno, e calcolarne i valori approssimati a 4 cifre decimali:

14. $\operatorname{arcsen}\frac{12}{13}$ **15.** $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)$ **16.** $2\operatorname{arcsen}\frac{1}{8}$

17. $2\arccos\frac{11}{40}$ **18.** $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$ **19.** $4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{30}-1}{\sqrt{29}}$

Esprimere i seguenti angoli tramite la funzione arcotangente, e calcolarne i valori approssimati a 4 cifre decimali:

20. $\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}$ **21.** $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{7}\right)$ **22.** $2\operatorname{arcsen}\frac{3}{8}$

23. $2\arccos\frac{1}{4}$ **24.** $2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ **25.** $2\operatorname{arctg} 10$

Confrontare le seguenti coppie di angoli, e verificare con la calcolatrice i risultati ottenuti:

26. $\alpha = \arccos\frac{4}{5}$, $\beta = 2\operatorname{arcsen}\frac{8}{25}$; **27.** $\alpha = \pi - \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}$, $\beta = 2\operatorname{arctg}\frac{52}{9}$

28. $\alpha = \operatorname{arccotg}\left(-\frac{3}{2}\right)$, $\beta = \pi - \operatorname{arcsen}\frac{3}{5}$ (per la verifica con la calcolatrice, tenere presenti le osservazioni riportate prima dell'esempio 8).

29. $\alpha = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(-\frac{43}{90}\right)$, $\beta = 4\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

SOLUZIONI

1. $x = k\pi$, $x = \pm\text{arctg}\ 5 + k\pi$

2. $x = \pm\text{arctg}\dfrac{4}{5} + k\pi$

3. $x = \text{arcsen}\dfrac{1}{3} + 2k\pi$, $x = \pi - \text{arcsen}\dfrac{1}{3} + 2k\pi$, $x = \text{arcsen}\dfrac{5}{6} + 2k\pi$, $x = \pi - \text{arcsen}\dfrac{5}{6} + 2k\pi$,

4. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \text{arctg}\ 2 + k\pi$, $x = \pm\text{arctg}2\sqrt{3} + k\pi$

5. $x = -\text{arcsen}\dfrac{1}{5} + 2k\pi$, $x = \arccos\left(-\dfrac{4\sqrt{6}}{11}\right) + 2k\pi$

6. $x = \arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right) + 2k\pi$, $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

7. $x = -\text{arcsen}\dfrac{7}{25} + 2k\pi$, $x = \pi + \text{arcsen}\dfrac{4}{5} + 2k\pi$

8. $\text{arcsen}\dfrac{9}{41} \cong 0.2213$

9. $-\text{arcsen}\dfrac{8}{\sqrt{65}} \cong -1.4464$

10. $\text{arcsen}\dfrac{\sqrt{35}}{18} \cong 0.3349$

11. $\pi - \text{arcsen}\dfrac{24}{25} \cong 1.855$

12. $\text{arcsen}\dfrac{4}{5} \cong 0.9273$

13. $\text{arcsen}\dfrac{3}{4} \cong 0.848$

14. $\arccos\dfrac{5}{13} \cong 1.176$

15. $-\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cong -0.3398$

16. $\arccos\dfrac{31}{32} \cong 0.2507$

17. $\arccos\left(-\dfrac{679}{800}\right) \cong 2.5844$

18. $\arccos\dfrac{1}{5} \cong 1.3694$

19. $\arccos\left(-\dfrac{14}{15}\right) \cong 2.7744$

20. $\text{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{4} \cong 0.3398$

21. $\text{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\right) \cong -0.1433$

22. $\text{arctg}\dfrac{3\sqrt{55}}{23} \cong 0.7688$

23. $\pi - \text{arctg}\dfrac{\sqrt{15}}{7} \cong 2.6362$

24. $\text{arctg}\dfrac{12}{5} \cong 1.176$

25. $\pi - \text{arctg}\dfrac{20}{99} \cong 2.9423$

26. $\alpha < \beta$ $(0.6435 < 0.6515)$

27. $\alpha > \beta$ $(2.8018 > 2.7988)$

28. $\alpha > \beta$ $(2.5536 > 2.4981$

29. $\alpha > \beta$ $(3.6397 > 3.6315)$