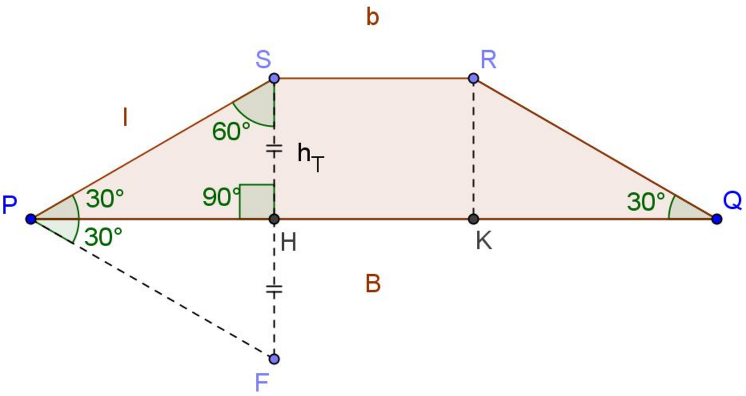
Trapezi con angoli alla base di 30°, 45° o 60°.

Esploriamo tutti i casi possibili: 30°-30°, 45°-45°,60°-60°, 30°-45°, 30°-60°, 45°-60°.

Un trapezio è un quadrilatero con almeno[1] due lati paralleli, detti **basi**. In generale un trapezio ha le basi non congruenti (che perciò vengono distinte in base minore e base maggiore) e gli altri due lati non paralleli fra loro (**lati obliqui**). Gli angoli *adiacenti alla base maggiore* li chiameremo, per brevità, **angoli alla base**.

ESERCIZIO Determina la relazione fra le misure dei lati, delle basi e dell'altezza relativa alla base maggiore, in trapezi con angoli alla base particolari. Per renderlo più interessante proponiamoci di calcolare **perimetro** e **area** <u>utilizzando il minor numero possibile di misure</u>.

<u>30°-30°</u>



Se gli *angoli alla base* sono ***congruenti*** il trapezio sarà **isoscele** e perciò i due *lati obliqui saranno* ***congruenti***.

Per ottenere un disegno rappresentativo del caso, si può sfruttare il fatto che il triangolo **PHS** è metà di un **triangolo equilatero** (scheda sul **seno** di un angolo).

Approssimativamente, osservando che un triangolo isoscele di base 6 quadretti e altezza 5 quadretti si avvicina a un triangolo equilatero, si può ottenere un disegno decente prendendo **PH** (proiezione del lato obliquo sulla base maggiore) di 5 quadretti e **SH** di 3.

Se vuoi un disegno preciso devi servirti di una costruzione con riga e compasso, per esempio a partire dal segmento **SF**, come quella che puoi trovare qui:

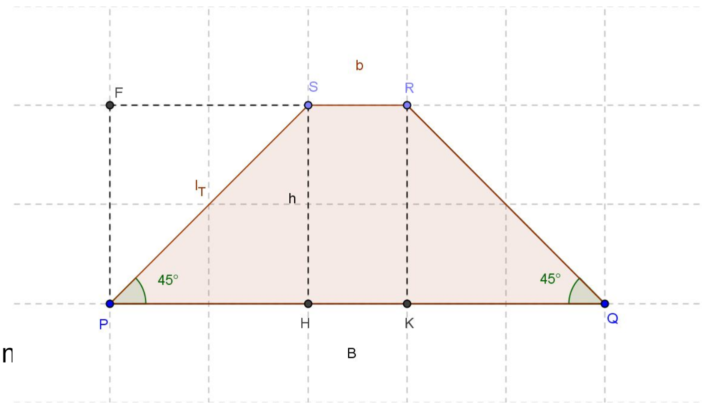
http://it.wikipedia.org/wiki/File:Equilateral_Triangle_Inscribed_in_a_Circle.gif .

Date la misura dei lati obliqui, ***l*,** e della base minore, ***b***, potremo determinare tutte le altre (***B*** e ***h****T*). Per quanto abbiamo già detto di **PHS** sarà infatti: **SH**=**PS**/2 e, inoltre: **PQ**=PH+HK+KQ=2·PH+HK, con $\overline{PH} = \frac{l}{2}\cdot\sqrt{3}$ (altezza del triangolo equilatero **PSF** di lato **PS**) e $\overline{HK} = b$. Da cui: $B = 2\cdot\frac{l}{2}\cdot\sqrt{3} + b = l\sqrt{3} + b$

Perimetro: $2p = 2\cdot\overline{PS} + \overline{SR} + \overline{PQ} = 2l + b + l\sqrt{3} + b = 3l\sqrt{3} + 2b$

Area: $A = \frac{(B+b)}{2}\cdot h_T = \frac{(l\sqrt{3}+b+b)}{2}\cdot\frac{l}{2} = \frac{(l\sqrt{3}+2b)\cdot l}{4}$

<u>45°-45°</u>



Anche questo è un trapezio isoscele.

Sapendo che un angolo di 45° può essere ottenuto tracciando la diagonale di un quadrato, per ottenere il disegno, puoi seguire la diagonale dei quadretti del foglio. Se vuoi effettuare una costruzione con riga e

[1] Questo avverbio comporta che l'insieme dei parallelogrammi sia un

compasso puoi vedere qui: http://it.wikipedia.org/wiki/File:Straight_Square_Inscribed_in_a_Circle.gif o escogitarne una tu, aiutandoti con Geogebra...

Considerando conosciute le misure di ***b*** ed ***l***, vedi che la misura della proiezione del lato obliquo sulla base maggiore (PH), puoi ottenerla osservando il quadrato **PHSF** del quale la diagonale è di misura nota perché coincide con il lato obliquo del trapezio.

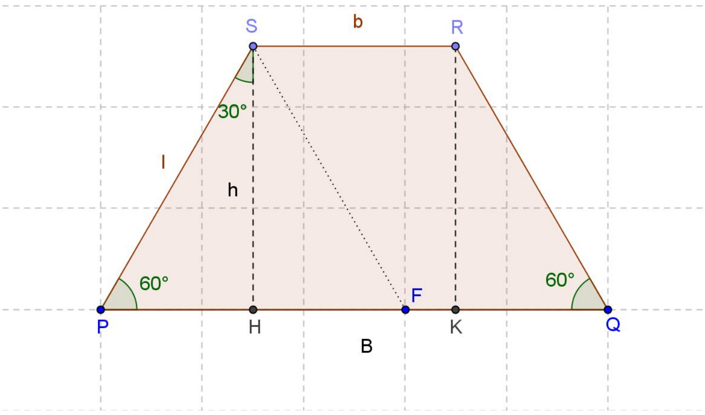
Utilizzando la relazione fra misura della diagonale d_Q e misura del lato l_Q in un quadrato ($d_Q = l_Q \cdot \sqrt{2}$), puoi trovare la misura di PH che è la stessa di SH: $\overline{PH} = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot l$.

B= *b+2·(l/√2) = b+√2·l*. E così hai tutto quel che ti serve per calcolare perimetro e area.

$$\text{Perimetro: } 2p = 2 \cdot l + b + B = 2l + b + b + l\sqrt{2} = 2l + 2b + l\sqrt{2}$$

$$\text{Area: } A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h_T = \frac{(l\sqrt{2}+b+b)}{2} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{(l\sqrt{2}+2b) \cdot l}{2\sqrt{2}}$$

60°-60°



Anche questo è un trapezio isoscele.

Per disegnarlo approssimativamente puoi fare PH di 3 quadretti e SH di 5, oppure effettuare la costruzione del triangolo equilatero **PFS**.

Il triangolo rettangolo **SPH** è la metà di un triangolo equilatero (**PFS**) di lato che misura ***l***. La proiezione del lato obliquo sulla base maggiore (PH) è, pertanto, la metà del lato obliquo PS.

Supponiamo siano note le misure di ***b*** ed ***l***.

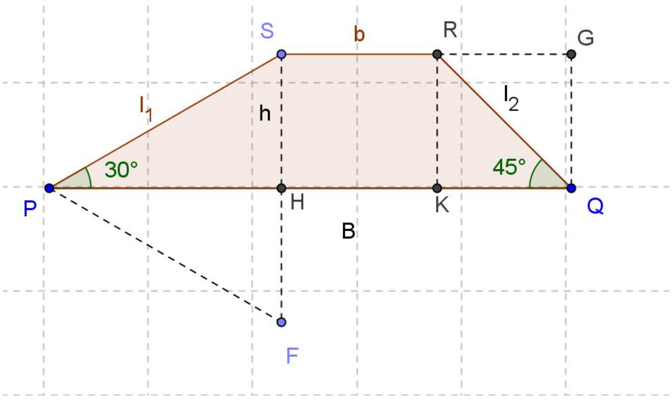
B= b+ 2(***l***/2) = ***b***+***l*** ; **h**= ***l***·√3/2

Perimetro: $2p = 2l + b + B = 2l + b + b + l = 2b + 3l$

Area: $A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h_T = \frac{(b+l+b)}{2} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(l+2b) \cdot l \cdot \sqrt{3}}{4}$

Per i restanti casi metterò disegno e conlcusioni, con poche spiegazioni.

30°-45°



In questo caso, per avere il perimetro e l'area in funzione del minor numero di grandezze possibili bisogna considerare note le misure di ***b*** e ***h***. I lati infatti non sono congruenti.

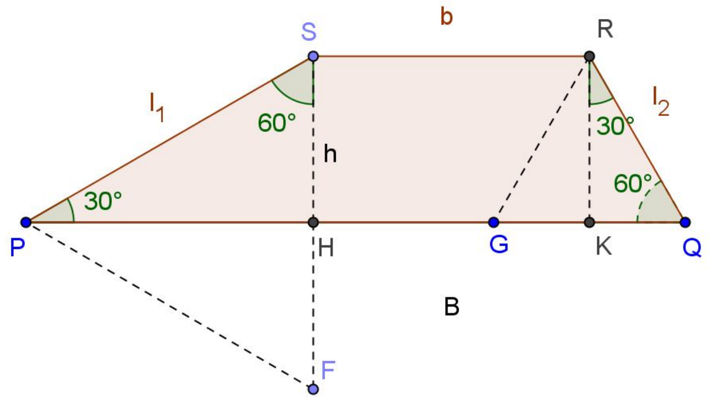
Osserva che, per ottenere la misura di PH in maniera semplice, ti conviene considerarlo come altezza del triangolo equilatero PSF che ha lato che misura 2·***h***.

$l_1 = 2 \cdot h$; $l_2 = h \cdot \sqrt{2}$; $B = h \cdot \sqrt{3} + b + h$

$2p = (h \cdot \sqrt{3} + b + h) + 2 \cdot h + h \cdot \sqrt{2} + b = h \cdot (3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}) + 2b$

$$A = \frac{(h\sqrt{3}+b+h)+b}{2}\cdot h = \frac{h\sqrt{3}+h+2b}{2}\cdot h$$

30°-60°



Anche in questo caso consideriamo note le misure di ***b*** e ***h***.

l₁=2·***h*** ; ***l₂***=2·***h***/√3 $h = \frac{l_2}{2}\sqrt{3} \Leftrightarrow l_2 = \frac{2h}{\sqrt{3}}$

B=***h***·√3+***b***+***h***/√3

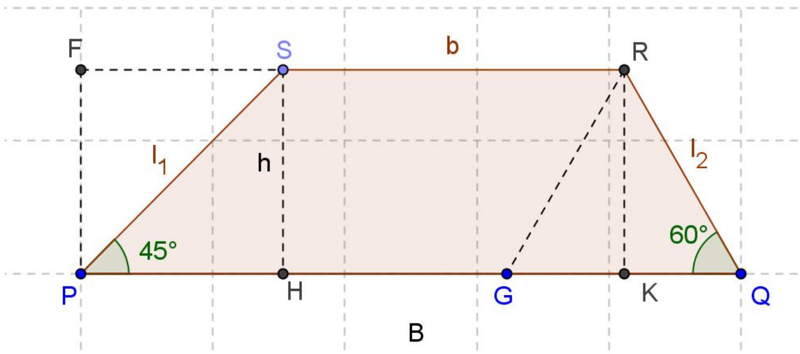
2p=***h***·√3+***b***+***h***/√3+2·***h***+2·***h***/√3+***b***=

=***h***·√3+3***h***/√3+2***b***= 2·***h***·√3+2***b***

Ricorda infatti che: 3/√3=√3

$$A = \frac{(h\sqrt{3}+b+\frac{h}{\sqrt{3}})+b}{2}\cdot h = \frac{h\sqrt{3}+\frac{h}{\sqrt{3}}+2b}{2}\cdot h$$

45°-60°



Anche in questo caso consideriamo note le misure di ***b*** e ***h***.

l₁=***h***·√2 ; ***l₂***=2·***h***/√3

B= ***h***+***b***+***h***/√3

2p=***h***+***b***+***h***/√3+***h***·√2+2·***h***/√3+***b***=

=***h***+***h***·√3+·***h***·√2+2***b***

$$A = \frac{(h+b+\frac{h}{\sqrt{3}})+b}{2}\cdot h = \frac{h+\frac{h}{\sqrt{3}}+2b}{2}\cdot h$$