1 I Logaritmi

Fissiamo un numero $a > 0$, $a \neq 1$. Dato un numero positivo t, l'equazione

$$a^x = t$$

ammette un'unica soluzione x che si chiama **logaritmo in base *a* di *t*** e si scrive

$$x = \log_a t.$$

Quando si parla di logaritmo occorre specificare sia l'argomento t che la base a e bisogna tenere presente che:

- è definito solo per argomenti positivi;
- è definito solo per basi positive e diverse da 1;
- può assumere valori positivi, negativi o nulli;
- vale 0 per $t = 1$

Le proprietà che seguono valgono $\forall\, x, y > 0$, $a > 0 \wedge a \neq 1$, *e b qualsiasi.*

$$\boxed{a^{\log_a x} = x} \quad \boxed{\log_a(a^x) = x} \quad \boxed{\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y} \quad \boxed{\log_a(x)^b = b \log_a x}$$

Da queste si possono anche dedurre le seguenti uguaglianze

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

$$\boxed{\log_a(\tfrac{1}{a}) = -1}$$

$$\boxed{\log_a(\tfrac{1}{x}) = -\log_a x}$$

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

Infine si ha

$$\boxed{\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1.}$$

Attenzione!

- $\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$
- $\log_a(x \cdot y) \neq (\log_a x)(\log_a y)$
- $\log_a(x^b) \neq (\log_a x)^b$

Per i logaritmi si usano generalmente due basi: la base 10 e la base e dove e è il numero irrazionale di Nepero, pari a $2,71828$....Per indicare i logaritmi in tali basi, detti rispettivamente logaritmi decimali e logaritmi neperiani o naturali, si usano due notazioni specifiche, che consentono di sottintendere la base:

$$Logx \equiv log_{10}x$$

$$\ln x \equiv log_e x$$

In ogni caso può essere talvolta d'aiuto la formula che esprime il cambiamento di base di un logaritmo

$$\boxed{log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}}$$

ESEMPI

Esempio 1 *Calcolare*

$$log_4\left(\frac{1}{16}\right)$$

Soluzione

$$log_4\frac{1}{16} = \quad log_4 4^{-2} = -2$$

Esempio 2 *Calcolare*

$$log_2 10 + log_2 12 - log_2 15$$

Soluzione

$$log_2 10 + log_2 12 - log_2 15 = \quad log_2\frac{10 \cdot 12}{15} = \quad log_2(2 \cdot 4) = log_2 2^3 = 3$$

Esempio 3 *Calcolare*

$$log_9 3$$

Soluzione

$$log_9 3 = \quad log_9 (3^2)^{\frac{1}{2}} = \quad log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Esempio 4 *Calcolare*

$$log_8 4$$

Soluzione

$$log_8 4 = \quad log_{2^3} 2^2 = \quad log_{2^3} 2^{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2} = \quad log_{2^3} (2^3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

Oppure ponendo $y = log_8 4$ *e applicando la definizione di logaritmo si ha* $8^y = 4$ *cioè* $2^{3y} = 2^2 \Leftrightarrow 3y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}$

Esempio 5 *Risolvere*

$$log_2(4 - x^2) = 4$$

Soluzione
Innanzi tutto dobbiamo imporre la condizione di esistenza chiedendo che l'argomento del logaritmo sia positivo: deve essere $4 - x^2 > 0$ *cioè* $-2 < x < 2$ *quindi*

$$log_2(4 - x^2) = 4 \quad \Leftrightarrow (4 - x^2) = 2^4 \quad \Leftrightarrow x^2 + 12 = 0 \quad \textit{che non ammette soluzioni reali.}$$

Possiamo concludere che l'equazione data non ammette soluzioni.

Esempio 6 *Risolvere*

$$log_4(x + 4) - 2log_4(x + 1) - \frac{1}{2} = 0$$

Soluzione
Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 4 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ log_4(x + 4) - 2log_4(x + 1) - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x + 4 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ log_4(x + 4) - 2log_4(x + 1) - log_4 4^{\frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$

e anche

$$\begin{cases} x > -4 \\ x > -1 \\ log_4 \dfrac{x+4}{(x+1)^2 \cdot 4^{\frac{1}{2}}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{(x+1)^2 \cdot 4^{\frac{1}{2}}} = 1 \end{cases}$$

Risolviamo la terza equazione

$$\begin{aligned} &\frac{x+4}{(x+1)^2 \cdot 4^{\frac{1}{2}}} = 1 \\ &x+4 = 2(x+1)^2 \\ &x+4 = 2x^2+2+4x \\ &2x^2+3x-2 = 0 \\ &x = \tfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \begin{cases} \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-3-5}{4} = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Sostituendo nella terza riga del sistema le soluzioni trovate

$$\begin{cases} x > -4 \\ x > -1 \\ x = -2 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

troviamo che $x = -2$ *non è accettabile perchè non soddisfa la condizione di esistenza* $x > -1$. *Il valore* $x = \frac{1}{2}$ *è l'unica soluzione dell'equazione.*

Esempio 7 *Risolvere*

$$log(x+1) + log(x-1) - log(x-2) = log8$$

Soluzione
L'equazione data è equivalente all'equazione

$$log\frac{(x+1)(x-1)}{x-2} = log8$$

Bisogna risolvere quindi il sistema

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ log\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2} = log8 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2} = 8 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \\ x > 2 \\ x = 5 \quad \vee \quad x = 3, \quad x \neq 2 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono $x = 5 \vee x = 3$ *perchè entrambe maggiori di* 2.

2 Disequazioni logaritmiche

Anche per le disequazioni logaritmiche non c'è una regola comune da seguire per la loro soluzione, perchè ogni caso è diverso dal precedente. Comunque la prima regola da seguire è trasformare i due membri in logaritmi aventi la stessa base, per poi passare alla diseguaglianza degli argomenti e risolvere la diseguaglianza che ne deriva. Alla fine bisogna intersecare l'insieme delle soluzioni con le condizioni di esistenza dei logaritmi. Nel passare dalla diseguaglianza tra i logaritmi alla diseguaglianza tra gli argomenti bisogna ricordare che

- $\forall x, y > 0 \; a \in \mathbb{R} : a > 1 \qquad log_a x > log_a y \qquad \Leftrightarrow \qquad x > y$
- $\forall x, y > 0 \; a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1 \qquad log_a x > log_a y \qquad \Leftrightarrow x < y$

ESEMPI

Esempio 8 *Risolvere*

$$log_2 3 > log_2 x$$

Soluzione
Bisogna confrontare due logaritmi nella stessa base maggiore di 1: la relazione d'ordine fra i logaritmi si mantiene nello stesso verso tra gli argomenti. Bisogna comunque imporre la condizione di esistenza dei logaritmi.

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3 > x \end{cases}$$

da cui $\qquad 0 < x < 3$

Esempio 9 *Risolvere*

$$log_5 x > 2$$

Soluzione
Osserviamo che $2 = log_5 5^2$ *per cui l'equazione si può scrivere*

$$log_5 x > log_5 5^2.$$

Bisogna quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > 25 \end{cases}$$

da cui $x > 25$

Esempio 10 *Risolvere*

$$log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 4x) > -1$$

Soluzione
Osserviamo che $-1 = log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ *per cui l'equazione si può scrivere*

$$log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 4x) > log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$$

Bisogna quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + 4x > 0 \\ x^2 + 4x < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -4 \vee x > 0 \\ \\ -5 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow -5 < x < -4 \vee 0 < x < 1$$

Esempio 11 *Risolvere*

$$log_{\frac{1}{2}}(3x - 2x^2) < 0$$

Soluzione
Osserviamo che $0 = log_{\frac{1}{2}} 1$ *per cui l'equazione si può scrivere*

$$log_{\frac{1}{2}}(3x - 2x^2) < log_{\frac{1}{2}} 1$$

Bisogna quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x - 2x^2 > 0 \\ 3x - 2x^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < \dfrac{3}{2} \\ \\ \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

Esempio 12 *Risolvere*

$$log_{\frac{1}{2}} x < log_{\frac{1}{2}} 5$$

Soluzione
In questo caso i due logaritmi sono nella stessa base, ma minore di 1; la relazione d'ordine fra gli argomenti è inversa rispetto alla relazione d'ordine tra i logaritmi

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > 5 \end{cases}$$

da cui $x > 5$

Esempio 13 *Risolvere*

$$log_{\frac{1}{4}}(1-x) < log_{\frac{1}{4}}(2x+3)$$

Soluzione
Si scrive il sistema considerando le due condizioni di esistenza dei logaritmi e la disequazione tra gli argomenti

$$\begin{cases} 1-x > 0 \\ \\ 2x+3 > 0 \\ \\ 1-x > 2x+3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x < 1 \\ \\ x > -\dfrac{3}{2} \\ \\ x < -\dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} < x < -\frac{2}{3}$$