FASCI DI RETTE

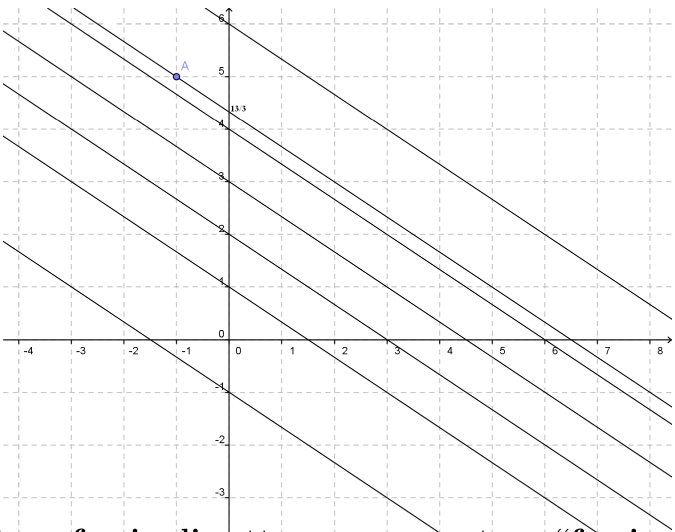
DEFINIZIONE: Si chiama **fascio di rette parallele o "fascio improprio"** [erroneamente data la somiglianza effettiva con un fascio!] un insieme di rette che hanno tutte lo stesso coefficiente angolare.
L'equazione di un fascio di rette parallele, ha, quindi il coefficiente angolare noto e il termine noto che dipende da un parametro. Per esempio $y = 2x + q$ è il fascio di rette parallele di coefficiente angolare 2. I problemi "diretti" che riguardano un fascio di rette parallele sono estremamente semplici:

1. Scrivere il fascio di rette parallele ad una retta data in forma esplicita: fascio di rette parallele a $y = -5x + 2$ è l'insieme di tutte le rette del tipo $y = -5x + q$

2. Scrivere il fascio di rette parallele ad una retta data in forma implicita: fascio di rette parallele a $3x - 2y - 4 = 0$

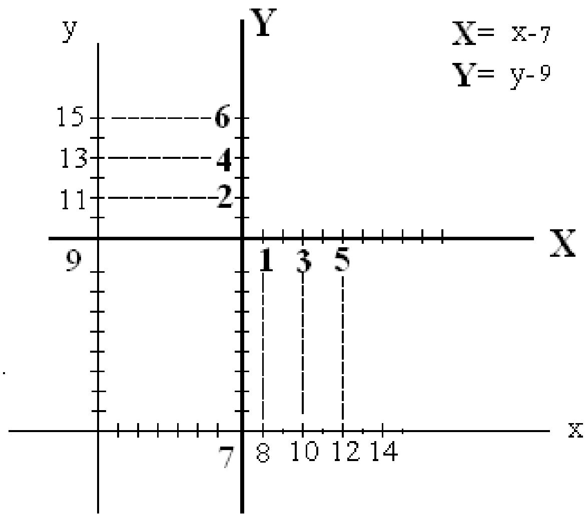
   - scrivere la retta in forma esplicita: $-2y = -3x + 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x - 2$
   - scrivere l'equazione del fascio di rette: $y = \frac{3}{2}x + q$

3. Dire per quale valore del parametro la retta del fascio passa per un determinato punto: **basta sostituire nell'equazione del fascio le coordinate del punto!**
   Per quale valore di q una retta del fascio $y = -\frac{2}{3}x + q$ passa dal punto $A \equiv (-1; 5)$?
   Basta scrivere
   $y = -\frac{2}{3}x + q \quad \Rightarrow \quad 5 = -\frac{2}{3} \cdot (-1) + q \quad \Rightarrow \quad 5 - \frac{2}{3} = q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{13}{3}$
   la retta cercata, quindi, sarà $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$



DEFINIZIONE: Si chiama **fascio di rette per un punto o "fascio proprio" o "fascio a stella"** un insieme di rette passanti tutte per lo stesso punto.
Servendoci dell'osservazione che il fascio di tutte le rette passanti per l'origine ha come equazione $y = mx$
e della formula della traslazione del piano (x, y, O) nel piano $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{0})$ che è $\begin{cases} \mathbf{Y} = y - y_0 \\ \mathbf{X} = x - x_0 \end{cases}$
si ottiene che il fascio di rette passanti per un generico punto $(x_C; y_C)$, ha equazione **Y=mX** nelle coordinate $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{C})$ [con il punto **C** come origine]; da questa, per la formula della traslazione, si passa a $\boxed{(y - y_C) = m(x - x_C)}$

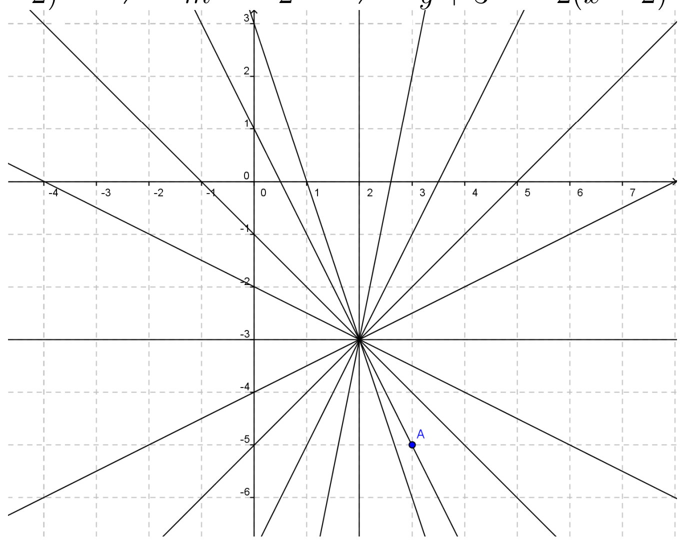
TRASLAZIONE



I problemi "diretti" che riguardano un fascio di rette per un punto sono estremamente semplici

1. dato un punto scrivere l'equazione del fascio di rette passanti per esso: il fascio di rette per $(2; -3)$ è dato da:
$$\begin{cases} x = 2 \ \text{ la retta verticale} \\ y = -3 \ \text{ la retta orizzontale} \\ [y - (-3)] = m(x-2) \ \text{ le rette oblique, che si può scrivere anche } \ y = mx - 2m - 3 \end{cases}$$

2. dall'equazione del fascio di rette "a stella", dire quale di esse passa per un punto dato: **basta sostituire nell'equazione del fascio le coordinate del punto!**
Quale delle rette del fascio $y + 3 = m(x-2)$ passa per il punto $A \equiv (3; -5)$?
Sostituisco le coordinate del punto nell'equazione
$(-5) + 3 = m(3-2) \quad \Rightarrow \quad m = -2 \quad \Rightarrow \quad y + 3 = -2(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 1$



Altri problemi sui fasci di rette sono:

1. data un'equazione di primo grado in due incognite dipendente da un parametro stabilire se si tratta di un fascio di rette parallele o di un fascio a stella.

   - Se il parametro non coinvolge i coefficienti di nessuna delle due variabili allora è necessariamente un fascio di rette parallele, perché il coefficiente angolate risulta noto. $3y + 2x - 2k + 1 = 0$ è sicuramente un fascio di rette parallele perché il coefficiente della y è 3 e quello della x è 2. Poiché nessuno dei due dipende dal parametro k, possiamo scriverlo nella forma canonica $3y = -2x + 2k - 1 \quad \Rightarrow$ $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2k-1}{3}$ e considerare $q = \dfrac{2k-1}{3}$

- Se i coefficienti della x e della y sono ugualmente coinvolti dal parametro (ossia sono uguali fra loro) allora si tratta di un fascio di rette parallele con una condizione su k.
  Data l'equazione parametrica (di primo grado in entrambe le incognite)
  $(2k-1)y-(2k-1)x+3-k=0$
  per scriverla in forma esplicita occorre fare
  $(2k-1)y=(2k-1)x-3+k=0$
  e poi dividere entrambi i membri per $(2k-1)$, ma questo **non è possibile farlo** se prima non si pone la condizione $(2k-1)\neq 0$: se, infatti, fosse $2k-1=0$ cioè $k=\frac{1}{2}$ allora l'equazione data diventerebbe
  $\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)y-\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)x+3-\frac{1}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{5}{2}=0$ che è IMPOSSIBILE.
  Posta, quindi, la condizione $k\neq\frac{1}{2}$ se dividiamo entrambi i membri per $(2k-1)$ otteniamo:
  $(2k-1)y=(2k-1)x-3+k=0 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{2k-1}{2k-1}\cdot x+\frac{-3+k}{2k-1} \quad\Rightarrow$
  $y=x+\frac{-3+k}{2k-1}$
  che è l'equazione di un fascio di rette parallele di coefficiente angolare $m=1$ e con termine noto $q=\frac{-3+k}{2k-1}$
- Se il parametro coinvolge i coefficienti della x, della y o di entrambe le coordinate (ma in modo diverso, ossia con coefficienti delle variabili diversi fra loro) allora si tratta di un fascio di rette passanti per un punto. Per esempio
  $ky+(5-k)x+5k-10=0 \qquad y-(k+2)x-5k+4=0 \qquad ky+3x-k=-3$
  sono tutti esempi di fasci di rette "a stella", perché dei coefficienti delle variabili x e y almeno uno è dipendente dal parametro k.

2. Dire per quale valore del parametro la retta del fascio passa per un determinato punto.

- Per quale valore di k una retta del fascio $3y+2x-2k+1=0$ passa dal punto $(-1;5)$?
  Si possono subito sostituire le coordinate del punto e scrivere:
  $3(5)+2(-1)-2k+1=0 \quad\Rightarrow\quad 15-2+1=2k \quad\Rightarrow\quad 14=2k \quad\Rightarrow\quad k=7$
  Ma per "riconoscere" la retta cercata, occorre scriverla in forma esplicita: si può, pertanto, sostituire il k trovato nell'equazione data
  $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2(7)-1}{3}$ cioè $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$
  oppure determinare fin dall'inizio di che tipo di fascio si tratta, come visto sopra
  $3y+2x-2k+1=0$ è sicuramente un fascio di rette parallele (perché nessuno dei due coefficienti della y è 3 e dipendono dal parametro k) e possiamo scriverlo nella forma esplicita
  $3y=-2x+2k-1 \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{2}{3}x+\frac{2k-1}{3}$ con $q=\frac{2(7)-1}{3}=\frac{13}{3}$
- Per quale valore di k una retta del fascio $ky+(5-k)x+5k-10=0$ passa per il punto $A\equiv(3;-5)$?
  Si possono subito sostituire le coordinate del punto e scrivere:
  $k(-5)+(5-k)(3)+5k-10=0 \quad\Rightarrow\quad -5k+15-3k+5k-10=0 \quad\Rightarrow$
  $-3k=-5 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{5}{3}$

Ma per "riconoscere" la retta cercata, occorre scriverla in forma esplicita: si può, pertanto, sostituire il k trovato nell'equazione data e ottenere
$\frac{5}{3}\cdot y+\left(5-\frac{5}{3}\right)\cdot x+5\cdot\frac{5}{3}-10=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{5}{3}y=-\left(\frac{10}{3}\right)x-\frac{25}{3}+10 \quad\Rightarrow$
$y=\frac{3}{5}\left[\left(\frac{10}{3}\right)x+\frac{5}{3}\right] \quad\Rightarrow\quad y=-2x+1$ vedi secondo dei "problemi diretti"

3. data l'equazione generica di un fascio a stella stabilire qual è il centro del fascio.
In realtà basterebbe semplicemente sostituire due valori scelti a caso al parametro k e ottenere due rette del fascio che si incontrano "per forza" nel centro del fascio: si risolve, quindi, il sistema fra le due rette e si trova il centro. Se, però riprendiamo gli esempi di sopra, ci accorgiamo che le rette più facili da individuare sono sempre quella orizzontale e quella verticale:

   - dato il fascio a stella $ky+(5-k)x+5k-10=0$ cerchiamo di individuarne per prima cosa la retta orizzontale $y=y_C$ e quella verticale $x=x_C$:
   <u>per ottenere la retta orizzontale occorre che il coefficiente della x sia 0</u>, cioè che
   $5-k=0 \quad\Rightarrow\quad k=5$: $\quad 5y+(5-5)x+5\cdot5-10=0 \;\Rightarrow\; 5y=-15 \;\Rightarrow\; y=-3$
   abbiamo ottenuto $y_C=-3$
   <u>per ottenere la retta verticale occorre che il coefficiente della y sia 0</u>, cioè che
   $k=0$: $\quad 0\cdot y+(5-0)x+5\cdot0-10=0 \quad\Rightarrow\quad 5x=10 \quad\Rightarrow\quad x=2$
   abbiamo ottenuto $x_C=2$
   Il nostro fascio $ky+(5-k)x+5k-10=0$ corrisponde, pertanto, al fascio a stella $[y-(-3)]=m(x-2)$
   - dato il fascio a stella $y-(k+2)x-5k+4=0$ cerchiamo di individuarne per prima cosa la retta orizzontale $y=y_C$ e quella verticale $x=x_C$:
   <u>per ottenere la retta orizzontale occorre che il coefficiente della x sia 0</u>, cioè che
   $k+2=0 \quad\Rightarrow\quad k=-2$: $\quad y-(-2+2)x-5(-2)+4=0 \;\Rightarrow\; y=-14$
   abbiamo trovato $y_C=-14$
   <u>per ottenere la retta verticale occorre che il coefficiente della y sia 0</u>, ma nel nostro caso il coefficiente della y non dipende da un parametro e quindi, essendo uguale a 1, non può diventare 0 per nessun valore di k! Questo vuol dire che al nostro fascio "manca" la retta verticale.
   Per trovare l'ascissa del centro del fascio, dobbiamo, quindi, intersecare la retta orizzontale del fascio $y=-14$ con un'altra retta qualsiasi del fascio: l'intersezione fra esse è, come detto sopra, il centro.
   Per scrivere l'equazione di un'altra retta del fascio attribuiamo a k un qualsiasi valore (non $k=-2$ perché otterremmo di nuovo la retta orizzontale!), per esempio 0 (che ci semplifica la vita!) e otteniamo $y-2x+4=0$:
   $\begin{cases} y=-14 \\ y-2x+4=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad -14-2x+4=0 \quad\Rightarrow\quad -10=2x \quad\Rightarrow\quad x=-5$
   abbiamo trovato adesso $x_C=-5$
   Il fascio $y-(k+2)x-5k+4=0$ corrisponde al fascio $y-(-14)=m(x-(-5)$
   - dato il fascio a stella $ky+3x-k=-3$ cerchiamo di individuarne per prima cosa la retta orizzontale $y=y_C$ e quella verticale $x=x_C$:
   <u>per ottenere la retta orizzontale occorre che il coefficiente della x sia 0</u>, ma nel nostro caso il coefficiente della x non dipende da un parametro e quindi, essendo uguale a 3, non può diventare 0 per nessun valore di k! Questo vuol dire che al nostro fascio "manca" la retta orizzontale.

Per trovare l'ordinata del centro del fascio, dobbiamo intersecare la retta verticale del fascio [che va ancora trovata!] con un'altra retta qualsiasi del fascio: l'intersezione fra esse è, come detto sopra, il centro.
<u>Per ottenere la retta verticale occorre che il coefficiente della y sia 0</u>, cioè che
$k = 0: \qquad 0 \cdot y + 3x - 0 = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -1$
abbiamo trovato $\quad x_C = -1$
Adesso, per scrivere l'equazione di un'altra retta del fascio attribuiamo a k un qualsiasi valore (non $k = 0$ perché otterremmo di nuovo la retta verticale!), per esempio 1 (che rende semplici i conti!) e otteniamo $\quad 1 \cdot y + 3x - 1 = -3$:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y + 3x - 1 = -3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y + 3(-1) - 1 = -3 \qquad \Rightarrow \qquad y = 1$$

abbiamo trovato adesso $\quad y_C = 1$
Il fascio $\quad ky + 3x - k = -3 \quad$ corrisponde al fascio $\quad y - 1 = m\,[x - (-1)]$