Formula per risolvere le equazioni di secondo grado. Dimostrazione completa e spiegazione.

Le equazioni di secondo grado sono quelle che contengono la variabile x con grado massimo 2.

Sono equazioni di secondo grado le seguenti:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$3x^2 + \frac{2}{4} = 0$$

$$\frac{x^2}{4} + 9x = 3$$

In generale la forma di una equazione di secondo grado è:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con $a \neq 0$

Una equazione di secondo grado ammette esattamente due soluzioni (che possono essere coincidenti). Questo risultato deriva dal teorema fondamentale dell'algebra, ma mi riservo ulteriori spiegazioni al riguardo per un ulteriore articolo.

La formula risolutiva che molti di voi sicuramente conosceranno a memoria dei tempi del liceo (o magari qualche lettore lo frequenta ancora) è la seguente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dimostrazione della formula risolutiva delle equazioni di secondo grado:

a) Consideriamo l'equazione di secondo grado nella sua forma generale:
$$ax^2 + bx + c = 0$$
b) Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per 4a ed otteniamo:
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$
NB possiamo moltiplicare per 4a perché $a \neq 0$
c) Sommiamo e sottraiamo al primo membro b^2 ed otteniamo
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - b^2 = 0$$
d) Riordiniamo gli elementi dell'equazione in questo modo:
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$
e)Notiamo che il primo membro dell'equazione è un quadrato, riscriviamo allora l'uguaglianza nella seguente maniera:
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$
f) Risolviamo adesso rispetto all'incognita x:
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
Con passaggi semplicissimi abbiamo ottenuto la famosa formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.

La quantità $b^2 - 4ac$ è chiamata discriminante, spesso indicata sol simbolo Δ (delta) e per questo chiamata da tutti gli studenti (ed ex studenti) più familiarmente delta. Si possono presentare tre casi:

Se $b^2 - 4ac > 0$ allora l'equazione ammette due soluzioni reali;

Se $b^2 - 4ac = 0$ allora l'equazione ammette due soluzioni reali coincidenti (in gergo una sola soluzione, ma con molteplicità due);

Se $b^2 - 4ac < 0$ allora l'equazione ammette due soluzioni complesse.

ESEMPIO Risolviamo a titolo di esempio una delle equazioni che avevo scritto ad inizio articolo:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4*1*5}}{2*1} =$$
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

cioè l'equazione ha due soluzioni complesse:

$\frac{-2 + i\sqrt{15}}{2}$ e $\frac{-2 - i\sqrt{15}}{2}$

È sicuramente cosa buona conoscere la formula a memoria, ma altrettanto buono è chiedersi da dove derivi. In alcuni casi – come questo – la dimostrazione è talmente semplice che impararla non richiede sforzo, ma arricchisce notevolmente la nostra cultura matematica.

I NUMERI COMPLESSI:

Numero complesso

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Con l'espressione numero complesso si intende un numero formato da una parte immaginaria e da una parte reale. Può essere perciò rappresentato dalla somma di un numero reale e di un numero immaginario (cioè un multiplo dell'unità immaginaria, indicata con la lettera i). I numeri complessi sono usati in tutti i campi della matematica, in molti campi della fisica (e notoriamente in meccanica quantistica), nonché in ingegneria, specialmente in elettronica/telecomunicazioni o elettrotecnica, per la loro utilità nel rappresentare onde elettromagnetiche e correnti elettriche ad andamento temporale sinusoidale.

In matematica, i numeri complessi formano un campo e sono generalmente visualizzati come punti del piano, detto piano complesso. La proprietà più importante che caratterizza i numeri complessi è il teorema fondamentale dell'algebra, che asserisce che qualunque equazione polinomiale di grado n ha esattamente n soluzioni complesse, non necessariamente distinte.

Definizione di numero complesso

Un numero si dice complesso quando e' formato da un numero reale piu' (o meno) un numero immaginario. Esempio:

3 + 2i E $= \frac{-2 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{15}}{2}$

sono numeri complessi.

Siccome di solito un numero complesso deriva dalla soluzione di un'equazione di secondo grado le radici dell'equazione saranno due e differiranno per il segno fra il numero reale e il numero immaginario.