Appunti di Matematica Finanziaria

Giovanni Masala - Marco Micocci
Facoltà di Economia - Università di Cagliari

Agosto 2006

Introduzione.

Queste dispense contengono il programma completo del corso di Matematica Finanziaria svolto nell'anno accademico 2005/2006 presso la Facoltà di Economia dell'Università di Cagliari.

1 Regimi Finanziari.

1.1 Considerazioni introduttive.

Si definisce **operazione finanziaria** un'operazione che produce una variazione di capitale nel tempo. Consideriamo ad esempio lo scadenzario seguente $(-100; 110) \,/\, (0; t)$ che prevede un'uscita di 100 all'epoca zero ed un'entrata di 110 all'epoca t. Possiamo riferirci più in generale allo scadenzario $(P; M) \,/\, (0; t)$. L'importo P (il capitale iniziale) viene chiamato **valore attuale** mentre l'importo M viene chiamato **montante.**

Se due individui si scambiano i capitali P ed M, questi due capitali si diranno **finanziariamente equivalenti**.

In un'operazione d'**investimento** avremo che $M > P$ perciò la differenza positiva $M - P = I$ è chiamata **interesse.** Avremo inoltre:

$$M = P + I \Longrightarrow \frac{M}{P} = \frac{P+I}{P} \Rightarrow \frac{M}{P} = 1 + \frac{I}{P}.$$

In quest'ultima relazione, poniamo $\frac{M}{P} = r(x, y)$ e $\frac{I}{P} = i(x, y)$ chiamati **fattore di capitalizzazione** (o di **montante**) e **tasso d'interesse** rispettivamente (rispetto alle epoche x e y). Da un punto di vista finanziario il fattore di montante rappresenta il montante ottenuto investendo un capitale unitario dall'epoca x all'epoca y, mentre il tasso d'interesse rappresenta l'interesse ottenuto investendo un capitale unitario dall'epoca x all'epoca y.

L'ultima relazione si può anche riscrivere nella forma seguente:

$$r(x, y) = 1 + i(x, y) \Longrightarrow M = P \cdot r(x, y) = P \cdot [1 + i(x, y)] \,.$$

Possiamo infine definire l'operazione inversa rispetto all'investimento, nota come operazione di **attualizzazione** (o **anticipazione**). In questo caso, il capitale M disponibile all'epoca y viene attualizzato (riportato indietro nel tempo) all'epoca x. La differenza positiva $M - P = D$ è chiamata **sconto.** Avremo inoltre:

$$P = M - D \Longrightarrow \frac{P}{M} = \frac{M-D}{M} \Rightarrow \frac{P}{M} = 1 - \frac{D}{M}.$$

In quest'ultima relazione, poniamo $\frac{P}{M} = v(x, y)$ e $\frac{D}{M} = d(x, y)$ chiamati **fattore di sconto** (o di **attualizzazione**) e **tasso di sconto** rispettivamente (rispetto alle epoche x e y). Da un punto di vista finanziario il fattore di sconto rappresenta il valore attuale ottenuto attualizzando un capitale unitario dall'epoca y all'epoca x mentre il tasso di sconto rappresenta lo sconto ottenuto attualizzando un capitale unitario dall'epoca y all'epoca x.

L'ultima relazione si può anche riscrivere nella forma seguente:

$$v(x, y) = 1 - d(x, y) \Longrightarrow P = M \cdot v(x, y) = P \cdot [1 - d(x, y)] \,.$$

Tenendo conto della definizione di fattore di montante e fattore di sconto possiamo dedurre che questi sono reciproci: $r(x, y) = \frac{1}{v(x,y)}$.

Osservazione. Indicheremo d'ora in poi l'epoca iniziale con 0 e l'epoca finale con t. Useremo perciò le seguenti notazioni:

$$r(0, t) = r_t = r(t)$$
$$v(0, t) = v_t = v(t)$$
$$i(0, t) = i_t = i(t)$$
$$d(0, t) = d_t = d(t)$$

(in tal caso t rappresenta la durata dell'operazione che non dipende dall'epoca d'investimento x). Ricordiamo che alla luce di queste nuove notazioni $i(t)$ rappresenta l'interesse generato da un capitale unitario investito per un periodo t, mentre $d(t)$ rappresenta il costo che devo sostenere per anticipare ad oggi un importo unitario che sarebbe disponibile solo tra t periodi. Osserviamo inoltre che note una di queste quattro funzioni, è possibile ricavare le altre tre.

Ricordiamo le relazioni seguenti:

$$M = P \cdot r(t)$$
$$P = M \cdot v(t)$$
$$I = P \cdot i(t)$$
$$D = M \cdot d(t).$$

Nel caso in cui $t = 1$ useremo le notazioni semplificate $r(0,1) = r$; $v(0,1) = v$; $i(0,1) = i$ e $d(0,1) = d$. Deduciamo da queste le seguenti relazioni:

$$r = \frac{1}{v} = 1 + i = \frac{1}{1-d}$$
$$v = 1 - d = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i}$$
$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{r-1}{r} = 1 - v$$
$$i = r - 1 = \frac{d}{1-d} = \frac{1-v}{v}.$$

Esempi.

1) Calcolare il tasso d'interesse e di sconto ed il fattore di attualizzazione corrispondenti ad un fattore di capitalizzazione $r = 1,25$.

Avremo $i = r - 1 = 0,25$. Inoltre $v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1,25} = 0,80$.

Infine $d = 1 - 0,80 = 0,20 = 1 - v$.

2) Si debba corrispondere dopo un periodo il capitale di 1.000 ed il tasso effettivo d'interesse i (uniperiodale) sia il 25%. Calcolare la somma da anticipare equivalente all'impegno preso ed il tasso effettivo di sconto.

Lo scadenzario dell'operazione è $(P; 1.000)/(0; 1)$. Determiniamo dapprima il fattore di sconto v.

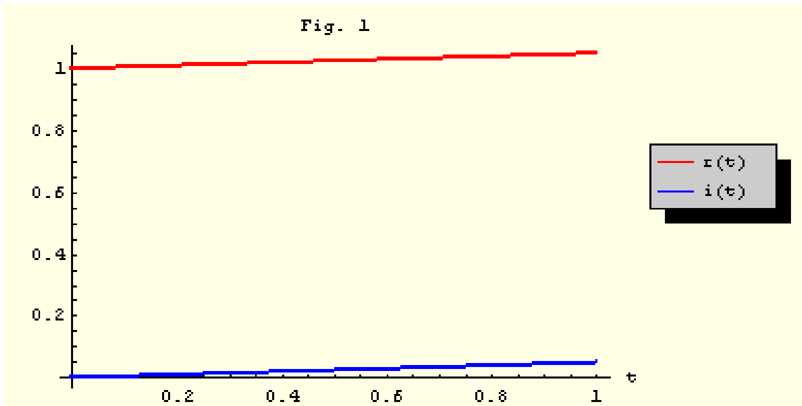
$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1,25} = 0,80.$$

Perciò $P = 1.000 \cdot v = 800$. Infine il tasso di sconto è $d = \frac{i}{1+i} = \frac{0,25}{1,25} = 0,20$.

3) Dato lo scadenzario $(-100; 121)/(0; 2)$, determinare i tassi d'interesse e di sconto, i fattori d'interesse e di sconto. I dati sono $P = 100$, $M = 121$, $t = 2$. Deduciamo $I = M - P = 121 - 100 = 21$. In base alle note relazioni avremo:

$$i(0,2) = \frac{I}{P} = \frac{21}{100} = 0,21 \to 21\%$$
$$r(0,2) = \frac{M}{P} = 1 + i(0,2) = 1,21$$
$$d(0,2) = \frac{i(0,2)}{1+i(0,2)} = \frac{0,21}{1,21} = 0,17355 = \frac{D}{M}$$
$$v(0,2) = \frac{1}{r(0,2)} = \frac{1}{1,21} = 0,82645 = 1 - d(0,2).$$

Possiamo adesso definire un **regime finanziario** come un insieme di "regole" che consente di effettuare operazioni di capitalizzazione e di attualizzazione. Possiamo perciò confrontare, conoscendo un particolare regime finanziario, importi disponibili ad epoche diverse. Vediamo in dettaglio alcuni tra i più importanti regimi finanziari.



1.2 Regime finanziario dell'interesse semplice.

Nel regime finanziario dell'interesse semplice ("$RFIS$"), s'ipotizza che l'interesse si produce proporzionalmente (ossia linearmente) rispetto al tempo. Avremo perciò:

$$I = C \cdot I \cdot t \Longrightarrow M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Inoltre il tasso d'interesse nel periodo t è legato al tasso annuo i dalla relazione $i(t) = i \cdot t$ mentre, il fattore di montante è dato dalla relazione $r(t) = 1 + i \cdot t$ (figura 1).

Esempi.

1) Calcolare l'interesse ed il montante prodotti da un capitale $C = 1.000$ impiegati:

- al $3,75\%$ per un anno;

- al 7% per 15 mesi.

Sfruttando la relazione $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$ e $I = C \cdot i \cdot t$ avremo nel primo caso:

$$M = 1.000 \cdot (1 + 0,0375 \cdot 1) = 1.037,5$$
$$I = 1.000 \cdot 0,0375 \cdot 1 = 37,5 = M - C$$

e nel secondo caso:

$$M = 1.000 \cdot \left(1 + 0,07 \cdot \tfrac{15}{12}\right) = 1.087,5$$
$$I = 1.000 \cdot 0,07 \cdot \tfrac{15}{12} = 87,5 = M - C.$$

2) Calcolare a quale tasso i un capitale di 800 produce un montante $M = 900$ in tre anni.

Dalla relazione

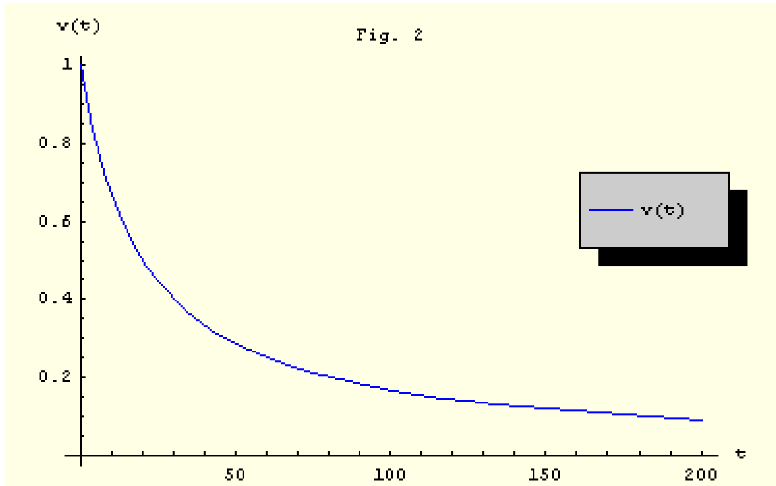
$$900 = 800 \cdot (1 + i \cdot 3)$$

si deduce che $i = \left(\frac{900}{800} - 1\right) \cdot \frac{1}{3} \Longrightarrow i = 0,0417 = 4,17\%$.

Ricordando le relazioni $r(t) = \frac{1}{v(t)}$ e $v(t) = \frac{1}{r(t)}$ avremo nel $RFIS$ le seguenti relazioni:

$$v(t) = \tfrac{1}{1+i \cdot t} = (1 + i \cdot t)^{-1}$$
$$d(t) = 1 - v(t) = \tfrac{i \cdot t}{1+i \cdot t}$$

Notiamo che al crescere di t il valore attuale diminuisce (figura 2).



1.3 Regime finanziario dello sconto commerciale.

Nel regime finanziario dello sconto commerciale ("$RFSC$") s'ipotizza che lo sconto è proporzionale al tempo:

$$D = M \cdot d \cdot t \Longrightarrow d(t) = d \cdot t$$

Possiamo inoltre dedurre le altre relazioni:

$$v(t) = 1 - d \cdot t$$
$$r(t) = \frac{1}{1-d \cdot t} = \frac{1}{v(t)}$$
$$i(t) = r(t) - 1 = \frac{d \cdot t}{1-d \cdot t}$$

Da queste relazioni dobbiamo imporre che $0 \leq t \leq \frac{1}{d}$ (inoltre per $t = \frac{1}{d}$ si annulla il valore attuale). Oltre questo limite, il $RFSC$ perde di significato.

Se ad esempio $d = 0,12$ avremo che $t < \frac{1}{0,12} \simeq 8,33$ (ossia otto anni e quattro mesi circa).

Esempi.

1) Calcolare il montante di un capitale pari a 100 dopo tre anni con $i = 10\%$.

Tenendo conto della relazione

$$M = C \cdot \frac{1}{1-d \cdot t} \text{ con } d = \frac{i}{1+i}$$

si avrà:

$$M = 100 \cdot \frac{1}{1-\frac{0,10}{1,10} \cdot 3} = 137,5$$

2) Una società presenta allo sconto una cambiale di $10.000.000$ scadente in nove mesi, la finanziaria applica un tasso di sconto del 16% nel $RFSC$. Calcolare l'importo accreditato.

Applichiamo le note relazioni:

$$P = 10.000.000 \cdot \left(1 - 0,16 \cdot \frac{9}{12}\right) = 8.800.000$$
$$D = 10.000.000 \cdot 0,16 \cdot \frac{9}{12} = 1.200.000 = M - P.$$

Osservazione. Confrontiamo i due regimi finanziari visti finora. Consideriamo un capitale $C = 1.000$ ed un tasso annuo $i = 10\%$. Per un tempo pari a sei mesi ($t = 1/2$) il montante nel $RFIS$ sarà $M_1 = 1.000 \cdot \left(1 + 0,10 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1.050$ mentre nel $RFSC$ avremo un montante pari a $M_2 = 1.000 \cdot \frac{1}{1-\frac{0,10}{1,10}\cdot\frac{1}{2}} = 1.047,6$ perciò $M_1 > M_2$ (il montante nel $RFIS$ prevale sullo sconto commerciale per una scadenza inferiore ad uno). Per scadenze maggiori di uno, si verifica il contrario. Riprendiamo lo stesso esempio con $t = 2$: $M_1 = 1.000 \cdot (1 + 0,10 \cdot 2) = 1.200$, mentre $M_2 = 1.000 \cdot \frac{1}{1-\frac{0,10}{1,10}\cdot 2} = 1.212,22$ perciò $M_1 < M_2$.

1.4 Regime finanziario dell'interesse composto.

Il regime finanziario dell'interesse composto ("$RFIC$") è caratterizzato dal fatto che l'interesse si accumula sul capitale e forma nuovi interessi. Da un punto di vista finanziario si può mostrare che in tal caso il fattore di montante è dato da una funzione esponenziale:

$$r(t) = (1+i)^t \Longrightarrow M(t) = C \cdot (1+i)^t$$

Il fattore di sconto sarà perciò:

$$v(t) = (1+i)^{-t} = \frac{1}{(1+i)^t}.$$

Abbiamo inoltre:

$$i(t) = (1+i)^t - 1$$

$$d(t) = 1 - v(t) = 1 - \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{(1+i)^t-1}{(1+i)^t}$$

Esempi.

1) Calcolare il montante e l'interesse prodotto dall'investimento di un capitale $C = 1.000$ per tre anni e sei mesi al tasso $i = 7,50\%$.

Applicando le formule precedenti si ottiene:

$$M = 1.000 \cdot (1,075)^{3,5} = 1.288,04$$

$$I = M - C = 288,04.$$

2) Sconto presso un istituto bancario una cambiale scadente tra nove mesi il cui valore è 3.000.000. La banca mi applica un tasso $i = 13\%$. Calcolare il tasso di sconto, la somma anticipata e lo sconto.

Applichiamo le formule note:

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0,13}{1,13} = 0,1150 \rightarrow d = 11,5\%$$

$$C = M \cdot (1+i)^{-t} = 3.000.000 \cdot (1,13)^{-9/12} = 2.737.237,1$$

$$D = M - C = 262.762,9$$

3) Impiegando il capitale C per due anni nel $RFIC$ al tasso i, ottengo il montante M. Nel $RFIS$, per ottenere lo stesso montante avrò bisogno di ulteriori due mesi. Calcolare il tasso i cui vengono effettuate le valutazioni.

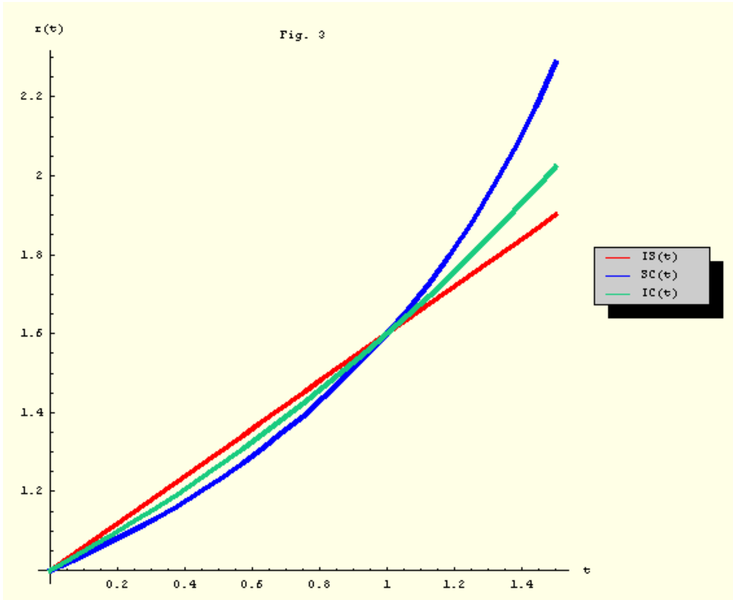
Nel primo caso avremo:

$$M_1 = C \cdot (1+i)^2$$

Nel secondo caso invece:

$$M_2 = C \cdot \left[1 + i \cdot \left(2 + \frac{2}{12}\right)\right].$$

Imponiamo perciò l'uguaglianza $M_1 = M_2$ che porta alla condizione:



$$C \cdot (1+i)^2 = C \cdot \left[1 + i \cdot \left(2 + \frac{2}{12}\right)\right] \Longrightarrow (1+i)^2 = 1 + i \cdot \left(2 + \frac{2}{12}\right)$$

ossia $i^2 - \frac{1}{6}i = 0$ la quale (escludendo la soluzione nulla, non accettabile) possiede l'unica soluzione $i = \frac{1}{6} \simeq 0,1667$.

Confrontiamo ora il fattore di montante nei tre regimi finanziari visti.

Si ha:

$$0 < t < 1 \Longrightarrow RFSC < RFIC < RFIS$$
$$t > 1 \Longrightarrow RFIS < RFIC < RFSC$$

ossia il montante prodotto nel $RFIC$ è sempre compreso tra quello relativo agli altri due regimi finanziari; per $0 < t < 1$ prevale lo sconto commerciale mentre per $t > 1$ prevale l'interesse semplice (vedere figura 3).

1.5 Tassi equivalenti.

Diremo in generale che due tassi sono **equivalenti,** quando applicati ad uno stesso capitale per una stessa durata, forniscono lo stesso montante.

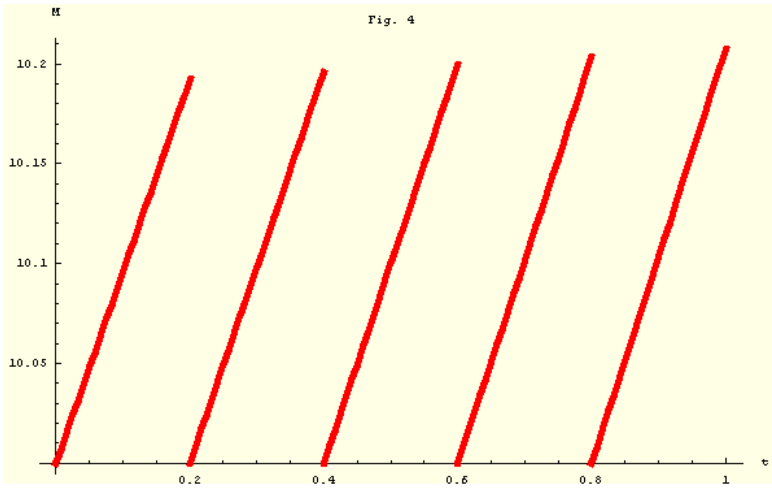
Poniamoci adesso nell'ambito del $RFIC$ ed indichiamo con $i_{1/m}$ il tasso relativo ad un $m - esimo$ di anno. Vogliamo determinare il tasso annuo i equivalente al tasso $i_{1/m}$. Per definizione di tassi equivalenti avremo che l'investimento di un capitale unitario per un anno porta alla relazione:

$$\left(1 + i_{1/m}\right)^m = (1 + i)$$

dalla quale possiamo ricavare il legame cercato:

$$i = \left(1 + i_{1/m}\right)^m - 1$$
$$i_{1/m} = (1+i)^{1/m} - 1.$$

Osserviamo che nel $RFIS$ si ha la relazione $i_{1/m} = i/m$.



Esempi.

1) Dato il tasso annuo $i = 20\%$, determinare il tasso semestrale $i_{1/2}$, il tasso quadrimestrale $i_{1/3}$, il tasso trimestrale $i_{1/4}$, il tasso mensile $i_{1/12}$ ed il tasso giornaliero $i_{1/365}$ equivalenti.

Utilizzando la relazione sui tassi equivalenti (lavoreremo sempre nel $RFIC$ se non diversamente specificato) avremo:

$$i_{1/2} = (1,20)^{1/2} - 1 = 0,954451$$
$$i_{1/3} = (1,20)^{1/3} - 1 = 0,06$$
$$i_{1/4} = (1,20)^{1/4} - 1 = 0,0466351$$
$$i_{1/12} = (1,20)^{1/12} - 1 = 0,015$$
$$i_{1/365} = (1,20)^{1/365} - 1 = 0,000496$$

2) Dato il tasso trimestrale $i_{1/4} = 0,05$ calcolare il tasso annuale, semestrale e quadrimestrale equivalenti.

Dalle relazioni note ricaviamo:

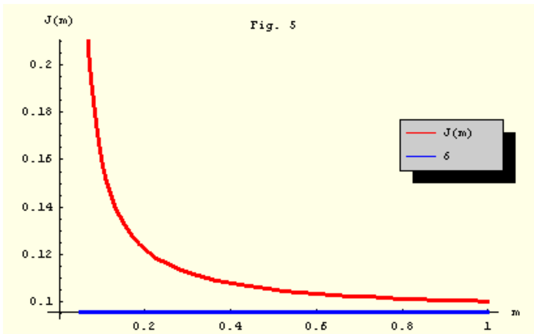
$$i = (1 + 0,05)^4 - 1 = 0,215506$$
$$i_{1/2} = (1,215506)^{1/2} - 1 = 0,1025$$
$$i_{1/3} = (1,215506)^{1/3} - 1 = 0,067$$

1.6 Tassi nominali.

Supponiamo di investire un capitale unitario per un anno e di ritirare ogni $m - esimo$ di anno (vedere figura 4.) l'interesse maturato. La somma algebrica degli interessi percepiti, indicata con $J(m)$ viene chiamata **tasso nominale** convertibile m volte nell'anno. Nell'ambito del $RFIC$ avremo perciò:

$$J(m) = m \cdot i_{1/m} = m \cdot \left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$$

Dalla definizione si deduce immediatamente che $i \geq J(m)$. Un'altra proprietà notevole del tasso nominale riguarda la sua monotonia rispetto ad m: si può dimostrare



che $J(m)$ decresce al crescere di m. Ad esempio, se prendiamo $i = 20\%$, avremo rispettivamente $J(1) = 0,20$, $J(2) = 0,1909$, $J(3) = 0,1880$, $J(4) = 0,1865$ ecc...

Si può inoltre dimostrare, utilizzando la regola di De L'Hopital, che $J(m)$ decresce asintoticamente verso un valore particolare, indicato con δ, chiamato **tasso istantaneo** (o tasso nominale convertibile istante per istante, o infinite volte).

Più precisamente, si ha (vedere figura 5):

$$\lim_{m\to\infty} J(m) = \lim_{m\to\infty} m \cdot \left[(1+i)^{1/m} - 1\right] = \log(1+i) = \delta$$

Esempio.

Sia $i = 20\%$. Avremo $\delta = \log(1 + 0,20) = 0,1823$.

Esempio.

La mia banca ogni sei mesi da oggi mi presta dieci milioni al tasso del 10% con interessi calcolati nel $RFIS$ all'interno dell'anno e capitalizzati al termine dell'anno stesso. Impiego detti capitali presso una finanziaria al 12% annuo nominale convertibile semestralmente in interesse composto. Se tra un anno e mezzo ritiro tutto dalla finanziaria e saldo il debito, quanto mi resterà in tasca?

Calcoliamo il debito dopo un anno e mezzo. Abbiamo lo scadenzario

$$(10; 10; 10; 10)/(0; 1/2; 1; 1 + 1/2).$$

Al tempo $t = 1$ avremo:

$$M_1 = 10 \cdot (1 + 0,10 \cdot 0,5) + 10 \cdot (1 + 0,10 \cdot 1) + 10 = 31,5$$

Dopo altri sei mesi avremo:

$$M_{1,5} = 31,5 \cdot (1 + 0,10 \cdot 0,5) = 33,0750$$

In parallelo, impiego il denaro al tasso $J(2) = 0,12$ e cioè $i_{1/2} = J(2)/2 = 0,06$. Si avrà quindi:

$$10 \cdot (1,06)^3 + 10 \cdot (1,06)^2 + 10 \cdot (1,06) = 33,7462.$$

con un residuo:

$$33,7462 - 33,0750 = 0,6712.$$

Osservazione.

Dalla relazione $\delta = \log(1 + i)$ possiamo dedurre che $e^\delta = 1 + i$ ossia $i = e^\delta - 1$. Il fattore di montante sarà perciò:

$$r(t) = (1+i)^t = e^{\delta \cdot t}$$

mentre il fattore di attualizzazione sarà:

$$v(t) = (1+i)^{-t} = e^{-\delta \cdot t}$$

Ovviamente, usare il tasso annuo i oppure il tasso istantaneo δ equivalente fornisce lo stesso risultato. Ad esempio, prendiamo $i = 20\%$ perciò $\delta = \log 1,20 = 0,1823$. Il montante di un capitale $C = 100$ dopo tre anni sarà:

$$M = 100 \cdot (1,20)^3 = 100 \cdot e^{0,1823 \cdot 3} = 172,8$$

Il valore attuale di 100 disponibile in due anni sarà:

$$C = 100 \cdot (1,20)^{-2} = 100 \cdot e^{-0,1823 \cdot 2} = 69,44$$

1.7 Scindibilità dei regimi finanziari.

Un regime finanziario è **scindibile** (secondo **Cantelli**) se il montante di un capitale investito dall'epoca 0 all'epoca t è pari a quello ottenuto investendo lo stesso capitale dall'epoca 0 ad un'epoca intermedia s e poi dall'epoca s all'epoca t. Questa definizione si può esprimere attraverso il fattore di montante nel modo seguente:

$$r(0,t) = r(0,s) \cdot r(s,t) \text{ con } 0 < s < t.$$

Possiamo esprimerla analogamente facendo ricorso al fattore di sconto:

$$v(0,t) = v(0,s) \cdot v(s,t) \text{ con } 0 < s < t.$$

Esempi.

1) Il $RFIC$ è scindibile. In effetti essendo $r(h,k) = (1+i)^{k-h}$ si ha:

$$r(0,t) = r(0,s) \cdot r(s,t) \Leftrightarrow (1+i)^t = (1+i)^s \cdot (1+i)^{t-s}$$

per una semplice proprietà delle potenze.

2) Il $RFIS$ non è scindibile. In effetti essendo $r(h,k) = 1 + i \cdot (k-h)$ si ha:

$$r(0,s) \cdot r(s,t) = [1 + i \cdot s] \cdot [1 + i \cdot (t-s)] \neq r(0,t) = [1 + i \cdot t]$$

Vediamo un'applicazione numerica nel $RFIC$ con i dati seguenti: $C = 100$; $i = 10\%$; $s = 2$; $t = 3$. Calcoliamo il montante con e senza capitalizzazione intermedia:

$$M = 100 \cdot (1,10)^2 \cdot (1,10) = 133,1$$
$$M = 100 \cdot (1,10)^3 = 133,1$$

Si ottiene come previsto lo stesso risultato.

1.8 Forza d'interesse.

Supponiamo che un capitale C disponibile all'epoca 0 produca un montante pari a M_t all'epoca t, ed un montante pari a $M_{t+\Delta t}$ all'epoca $t + \Delta t$ (rispetto ad un generico regime finanziario). La differenza $M_{t+\Delta t} - M_t$ rappresenta quindi l'interesse prodotto tra l'epoca t e l'epoca $t + \Delta t$ (abbiamo considerato quindi un investimento di durata Δt dall'epoca t).

Essendo

$$M_t = C \cdot r(t)$$
$$M_{t+\Delta t} = C \cdot r(t + \Delta t)$$

possiamo scrivere:

$$M_{t+\Delta t} - M_t = M_t \cdot \frac{M_{t+\Delta t} - M_t}{M_t} = M_t \cdot \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{r(t)}$$

Se la funzione $r(t)$ è derivabile con derivata continua nel proprio dominio potremo approssimare la differenza $r(t+\Delta t) - r(t)$ con il differenziale, perciò:

$$M_{t+\Delta t} - M_t \simeq M_t \cdot \frac{r'(t)}{r(t)} \cdot \Delta t$$

Definiamo ora una nuova funzione chiamata **forza d'interesse** nel modo seguente:

$$\delta(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{d}{dt} \log r(t).$$

Avremo quindi:

$$M_{t+\Delta t} - M_t = I_{t,t+\Delta t} = M_t \cdot \delta(t) \cdot \Delta t$$

La funzione $\delta(t)$ è il fattore di proporzionalità nella produzione del montante (osserviamo inoltre che l'approssimazione col differenziale è tanto migliore quanto piccolo è l'incremento.Δt; considereremo a questo proposito un incremento infinitesimo che indicheremo con dt).

La forza d'interesse si ottiene, per definizione, come la derivata logaritmica del fattore di montante. Utilizzando il calcolo integrale, possiamo determinare il fattore di montante conoscendo la forza d'interesse. Procediamo nel modo seguente:

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t \frac{d}{ds} \log r(s)\, ds = \log r(t)$$

avremo perciò:

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)\, ds}$$
$$v(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)\, ds}$$

Conoscere la forza d'interesse equivale quindi conoscere il regime finanziario. Osserviamo che nell'integrale abbiamo indicato con s la variabile d'integrazione mentre t rappresenta il tempo generico.

Esempio.

1) Determinare il montante di $4.000.000$ dopo sei periodi se la forza d'interesse è

$$\delta(t) = \frac{0{,}095}{1+0{,}095 \cdot t}.$$

Il montante è dato da

$$M = 4.000.000 \cdot r(6) = 4.000.000 \cdot e^{\int_0^6 \delta(s)\, ds}$$

Calcoliamo innanzi tutto il fattore di montante (abbiamo un integrale immediato).

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t \frac{0{,}095}{1+0{,}095 \cdot s}\, ds = [\log(1+0,095 \cdot s)]_0^t = \log(1+0,095 \cdot t)$$

Perciò:

$$M = 4.000.000 \cdot e^{\log(1+0{,}095 \cdot t)} = 4.000.000 \cdot (1+0,095 \cdot 6) = 6.280.000$$

Calcoliamo ora la forza d'interesse nei tre regimi finanziari introdotti prima:

♦ $RFIS : \delta(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{i}{1+i \cdot t}$

♦ $RFSC : \delta(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{d}{1-d \cdot t}$

♦ $RFIC : \delta(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \log(1+i) = \delta$ (coincide numericamente col tasso istantaneo).

Esercizio.

Sia $\delta(t) = 0,12$, calcolare in quanto tempo un capitale di 12 fornisce un montante di 55.

Essendo in questo caso la forza d'interesse costante, il montante è dato dalla regola:

$$M = C \cdot e^{\delta \cdot t}$$

In questa relazione, l'incognita è il tempo t. Avremo

$$e^{\delta \cdot t} = \frac{M}{C} \Longrightarrow t = \frac{\log(M/C)}{\delta}$$

Sostituendo infine i dati del problema, si ottiene:

$$t = \frac{1}{0{,}12} \cdot \log \frac{55}{12} = 12,69.$$

Esercizio.

La forza d'interesse di un certo regime finanziario è $\delta(t) = 2i \cdot t^2$. Calcolare la legge di capitalizzazione corrispondente nonché il valore attuale di $1,5$ milioni disponibili tra due anni se $i = 9\%$.

Determiniamo il fattore di montante:

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)\, ds} = e^{\int_0^t 2i \cdot s^2\, ds} = e^{\left[2i \cdot \frac{s^3}{3}\right]_0^t} = e^{2i \cdot \frac{t^3}{3}}$$

Il fattore di sconto sarà perciò:

$$v(t) = e^{-2i \cdot \frac{t^3}{3}}$$

quindi il valore attuale è:

$$VA = 1.500.000 \cdot v(2) = 1.500.000 \cdot e^{-2 \cdot 0{,}09 \cdot \frac{2^3}{3}} = 928.175$$

Esercizio.

Data la funzione $f(t) = 1 + i \cdot \log(1 + t)$, determinare se sia una legge di capitalizzazione, il montante di $C = 1.000$ dopo cinque anni e la corrispondente forza d'interesse $\delta(t)$ con $i = 15\%$.

Affinché la funzione $f(t)$ (che supponiamo derivabile) rappresenti una legge di capitalizzazione deve soddisfare le proprietà:

- $f(0) = 1$
- $f(t)$ è crescente rispetto al tempo t (ossia $f'(t) > 0$).

Nel nostro caso avremo:

$$f(0) = 1 + i \cdot \log 1 = 1$$
$$f'(t) = \frac{i}{1+t} > 0 \text{ per } t > 0$$

perciò le condizioni richieste sono soddisfatte.

Poniamo adesso $i = 0,15$ e $t = 5$:

$$M = 1.000 \cdot (1 + 0,15 \cdot \log 6) = 1.269$$

inoltre:

$$\delta(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{\frac{i}{1+i}}{1+i \cdot \log(1+t)}$$

Teorema. *Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un regime finanziario sia scindibile è che la sua forza d'interesse non dipenda dal tempo t.*

Esercizi di riepilogo.

1) Calcolare I e M prodotti da un capitale $C = 1.000$, impiegati al tasso i annuo e per il periodo indicati (nel $RFIS$):

a) al $3,75\%$ per un anno;

avremo:

$$I(t) = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0,0375 \cdot 1 = 37,5$$

$$M = I(t) + C = 37,5 + 1.000 = 1.037,5$$

b) al 7% per 15 mesi;

$$I(t) = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0,07 \cdot \tfrac{15}{12} = 87,5$$
$$M = I(t) + C = 87,5 + 1.000 = 1.087,5$$

c) al $9,25\%$ per 120 giorni;

$$I(t) = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0,0925 \cdot \tfrac{120}{360} = 30,8\overline{3}$$
$$M = I(t) + C = 30,8\overline{3} + 1.000 = 1.030,8\overline{3}.$$

2) Calcolare a quale tasso annuo d'interesse (nel $RFIS$):

a) un capitale di 1.250 produce un interesse $I = 84,375$ in un anno;

utilizziamo la nota relazione:

$$I(t) = C \cdot i \cdot t \Longrightarrow i = \tfrac{I(t)}{C \cdot t} = \tfrac{84,375}{1.250 \cdot 1} = 0,0675 \rightarrow i = 6,75\%$$

b) un capitale di 800 produce un montante di 900 in tre anni;

utilizziamo la nota relazione:

$$M(t) = C \cdot (1 + i \cdot t) \Longrightarrow i = \tfrac{1}{t} \cdot \left(\tfrac{M(t)}{C} - 1 \right) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{900}{800} - 1 \right) = 0,041\overline{6}.$$

c) un capitale C generico raddoppia in due anni;

essendo $M(t) = 2C$, si ottiene:

$$i = \tfrac{1}{t} \cdot \left(\tfrac{2C}{C} - 1 \right) = \tfrac{1}{2} \cdot (2 - 1) = 0,5 \rightarrow i = 50\%$$

3) Calcolare in quanto tempo, al tasso d'interesse del $7,50\%$ annuo (nel $RFIS$)

a) un capitale di 3.500 produce un interesse di 350;

utilizziamo la relazione:

$$t = \tfrac{I(t)}{C \cdot i} = \tfrac{350}{3.500 \cdot 0,075} = 1,\overline{3} \qquad \text{(un anno e 4 mesi)}$$

b) un capitale di 2.500 produce un montante di 3.000;

utilizziamo la relazione:

$$t = \tfrac{1}{i} \cdot \left(\tfrac{M(t)}{C} - 1 \right) = \tfrac{1}{0,075} \cdot \left(\tfrac{3.000}{2.500} - 1 \right) = 2,\overline{6} \qquad \text{(2 anni e 8 mesi).}$$

4) Calcolare il capitale da investire oggi al $9,50\%$ annuo per avere (nel $RFIS$):

a) un montante pari a 1.000 tra 14 mesi;

utilizziamo la relazione:

$$C = \tfrac{M(t)}{1 + i \cdot t} = \tfrac{1.000}{1 + 0,095 \cdot \frac{14}{12}} = 900,225$$

b) un interesse pari a 100 tra 6 mesi;

utilizziamo la relazione:

$$C = \tfrac{I(t)}{i \cdot t} = \tfrac{100}{0,095 \cdot \frac{6}{12}} = 2.105,263.$$

5) Viene stipulato un prestito di 5.000 da restituire dopo 9 mesi con $i = 12\%$ nel $RFIS$. Calcolare il valore attuale dopo 5 mesi della somma dovuta usando il tasso d'interesse del 10% annuo.

Il montante è:

$$M(t) = C \cdot (1 + i \cdot t) = 5.000 \cdot \left(1 + 0,12 \cdot \tfrac{9}{12} \right) = 5.450$$

Il valore attuale richiesto sarà allora (attualizziamo il montante precedente di tre mesi):

$$P = M(t) \cdot v(t) = M(t) \cdot \tfrac{1}{1 + i \cdot t} = \tfrac{5.450}{1 + 0,10 \cdot \frac{3}{12}} = 5.317,07$$

6) Calcolare nel $RFSC$ sconto e valore attuale per un capitale a scadenza $K = 1.000$ con tasso annuo di sconto ed intervallo di tempo indicati:

a) $d = 0,10$; $t = 1$;

abbiamo le relazioni:

$$D = K \cdot d \cdot t = 1.000 \cdot 0,10 \cdot 1 = 100$$
$$P = K - D = 1.000 - 100 = 900$$

b) $d = 0,12$; $t = 8/12$ (otto mesi);

abbiamo le relazioni:

$$D = K \cdot d \cdot t = 1.000 \cdot 0,12 \cdot \tfrac{8}{12} = 80$$
$$P = K - D = 1.000 - 80 = 920.$$

7) Calcolare nel $RFSC$ il tasso annuo di sconto in base al quale:

a) 1.000 è il valore attuale di 1.300 disponibili tra otto mesi;

utilizziamo la relazione:

$$P = K \cdot v(t) = K \cdot (1 - d \cdot t) \Longrightarrow d = \left(1 - \tfrac{P}{K}\right) \cdot \tfrac{1}{t}$$
$$d = \left(1 - \tfrac{1.000}{1.300}\right) \cdot \tfrac{1}{8/12} = 0,346$$

b) 1.000 è lo sconto necessario per anticipare di un anno un capitale di 10.000;

utilizziamo la relazione:

$$D = K \cdot d \cdot t \Longrightarrow d = \tfrac{D}{K \cdot t} = \tfrac{1.000}{10.000 \cdot 1} = 0,1$$
$$d = 10\%$$

c) il valore attuale di un capitale C disponibile tra 18 mesi è la metà di C;

consideriamo la relazione del punto *a)*

$$d = \left(1 - \tfrac{P}{K}\right) \cdot \tfrac{1}{t} = \left(1 - \tfrac{C/2}{C}\right) \cdot \tfrac{1}{t} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} = 0,\overline{3}.$$

8) Una banca concede prestiti a breve termine al tasso annuo dell'8% d'interesse semplice anticipato. Calcolare la somma che si riscuote in effetti contraendo un prestito di:

a) 8.000 a tre mesi.

Utilizziamo la relazione

$$P = K \cdot (1 - d \cdot t) = 8.000 \cdot \left(1 - 0,08 \cdot \tfrac{3}{12}\right) = 7.840$$

b) 12.500 a 45 giorni.

$$P = K \cdot (1 - d \cdot t) = 12.500 \cdot \left(1 - 0,08 \cdot \tfrac{45}{360}\right) = 12.375$$

9) Calcolare a quale tasso annuo d'interesse semplice posticipato corrisponde un interesse anticipato di 160 ad un capitale di 8.000 prestato per tre mesi.

Utilizziamo le note formule:

$$C = K - I = 8.000 - 160 = 7.840$$
$$i = \tfrac{I}{C \cdot t} = \tfrac{160}{7.840 \cdot \frac{3}{12}} = 0,0816 \to i = 8,16\%$$

10) Calcolare i seguenti tassi equivalenti (nel $RFIC$).

♦ $i = 0,20 \to$ determinare il tasso mensile $i_{1/12}$

$$i_{1/12} = (1 + 0,20)^{1/12} - 1 = 0,015309$$

♦ $i = 0,15 \to$ determinare il tasso trimestrale $i_{1/4}$

$$i_{1/4} = (1 + 0,15)^{1/4} - 1 = 0,035558$$

♦ $i_{1/6} = 0,09 \rightarrow$ determinare il tasso annuo i

$$i = (1 + 0,09)^6 - 1 = 0,6771$$

♦ $i = 0,14 \rightarrow$ determinare il tasso nominale $j(2)$

$$i_{1/2} = (1 + 0,14)^{1/2} - 1 = 0,0677$$

$$J(2) = 2 \cdot i_{1/2} = 0,1354$$

♦ $J(3) = 0,12 \rightarrow$ determinare il tasso annuo i

$$i_{1/3} = \frac{J(3)}{3} = 0,04$$

$$i = (1 + 0,04)^3 - 1 = 0,12486$$

♦ $i = 0,09 \rightarrow$ determinare il tasso istantaneo δ

$$\delta = \log(1 + i) = \log 1,09 = 0,08618$$

♦ $\delta = 0,10 \rightarrow$ determinare il tasso annuo i

$$i = e^{\delta} - 1 = 0,10517$$

11) Calcolare nel $RFIC$ il montante e l'interesse prodotti da ciascuno degli investimenti che seguono.

a) $C = 1.200$ al 13% annuo per tre anni e quattro mesi:

abbiamo $t = 3 + \frac{4}{12} = \frac{10}{3}$ perciò

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t = 1.200 \cdot (1 + 0,13)^{10/3} = 1.803,47$$

$$I = M - C = 603,47$$

b) $C = 7.500$ al tasso istantaneo del $7,5\%$ per due anni e sei mesi:

abbiamo $i = e^{\delta} - 1 = e^{0,075} - 1 = 0,07788$ perciò

$$M(t) = C \cdot (1 + i)^t = 7.500 \cdot (1 + 0,07788)^{2,5} = 9.046,727$$

$$I = M - C = 1.546,7269$$

Possiamo calcolare il montante nel modo equivalente:

$$M(t) = C \cdot e^{\delta \cdot t} = 7.500 \cdot e^{0,075 \cdot 2,5} = 9.046,727$$

12) Calcolare il tempo necessario (nel $RFIC$) per generare un montante di 4.000 da un capitale di 2.500 impiegato al 5% semestrale.

Determiniamo il tasso annuo equivalente:

$$i = (1 + 0,05)^2 - 1 = 0,1025.$$

Dalla relazione

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

ricaviamo

$$t = \frac{\log M/C}{\log(1+i)} = \frac{\log \frac{4.000}{2.500}}{\log 1,1025} = 4,817$$

13) Se il tasso d'interesse vigente è del $9,50\%$ annuo (nel $RFIC$) conviene:

a) pagare 3.100 oggi oppure 300 oggi e 3.000 tra un anno?

Confrontiamo i valori attuali delle due alternative.

$$P_1 = 3.100$$

$$P_2 = 300 + 3.000 \cdot (1,095)^{-1} = 3.039,726$$

Conviene la seconda alternativa (v.a. minore).

b) pagare 2.500 oggi oppure 1.500 tra sei mesi e 1.500 tra un anno?

Confrontiamo i valori attuali delle due alternative.

$$P_1 = 2.500$$
$$P_2 = 1.500 \cdot (1,095)^{-1/2} + 1.500 \cdot (1,095)^{-1} = 2.803,32$$

Conviene la prima alternativa (v.a. minore).

14) Investite 2.500 euro per due anni (nel $RFIC$), al tasso del 10% nominale pagabile due volte l'anno. Quale montante ricavate al termine se ogni disponibilità ulteriore vi rende il 3% trimestrale?

Conosciamo $J(2) = 0,10$, perciò $i_{1/2} = 0,05$.

Le quattro quote interessi varranno:

$$I = C \cdot i_{1/2} = 2.500 \cdot 0,05 = 125$$

Queste rate sono reinvestite al tasso trimestrale fornito. Determiniamo il tasso annuo equivalente:

$$i = (1 + 0,03)^3 - 1 = 0,092727$$

Avremo pertanto:

$$I_{tot} = 125 \cdot (1,092727)^{1,5} + 125 \cdot (1,092727)^1 +$$
$$+125 \cdot (1,092727)^{0,5} + 125 = 535,04$$

Il montante sarà quindi:

$$M = C + I_{tot} = 3.035,04$$

15) Un operatore ottiene a prestito da una banca una somma e, inoltre, dopo cinque anni una somma tripla della precedente. Dopo altri cinque anni, restituisce a saldo del dovuto 1.500 euro. Calcolare quali somme sono state prestate dalla banca, se $i = 12\%$ (nel $RFIC$).

Abbiamo lo scadenzario seguente:

$$(C; 3C; 1.500)/(0; 5; 10)$$

perciò dovremo risolvere l'equazione seguente nell'incognita C:

$$C \cdot (1+i)^{10} + 3C \cdot (1+i)^5 = 1.500$$

da cui:

$$C = \frac{1.500}{(1+i)^{10} + 3 \cdot (1+i)^5} = 178,723$$
$$3C = 536,1692.$$

16) Assegnata la forza d'interesse $\delta(t) = \frac{1+e^t}{10}$, calcolare il montante prodotto in un anno e due mesi da un capitale iniziale di 1.250.000 euro.

I dati sono $C = 1.250.000$ e $t = \frac{14}{12}$.

Il montante è dato da $M(t) = C \cdot r(t)$ con $r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)\, ds}$

Calcoliamo preliminarmente l'integrale della forza d'interesse:

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \frac{1}{10} \cdot \int_0^t (1 + e^s)\ ds = \frac{1}{10} \cdot [s + e^s]_0^t = \frac{1}{10} \cdot (t + e^t - 1)$$
$$\frac{1}{10} \cdot \int_0^{14/12} \delta(s)\, ds = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{14}{12} + e^{14/12} - 1\right) = 0,337794$$

Avremo perciò:

$$M = 1.250.000 \cdot e^{0,337794} = 1.752.314,13$$

17) Sapendo che la forza d'interesse vigente sul mercato è $\delta(t) = \alpha + \beta \cdot t$, calcolare il montante di 100 dopo tre anni se $\alpha = 0,02$ e $\beta = 0,10$.

Calcoliamo preliminarmente l'integrale della forza d'interesse:

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t (\alpha + \beta \cdot s)\, ds = \left[\alpha \cdot s + \frac{\beta \cdot s^2}{2}\right]_0^t =$$
$$= \alpha \cdot t + \frac{\beta \cdot t^2}{2} = 0,02 \cdot t + \frac{0,10 \cdot t^2}{2}$$
$$\int_0^3 \delta(s)\, ds = 0,02 \cdot 3 + \frac{0,10 \cdot 3^2}{2} = 0,51$$

Avremo perciò:

$$M = 100 \cdot e^{0,51} = 166,529$$

18) Verificare se il regime finanziario la cui legge di capitalizzazione è

$$r(t) = 1 + i^2 \cdot t^2$$

sia scindibile o meno.

Determiniamo la forza d'interesse:

$$\delta(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{2i^2 \cdot t}{1 + i^2 \cdot t^2}$$

Vediamo che $\delta(t)$ dipende dal tempo t perciò il regime finanziario in oggetto non è scindibile.

2 Le rendite.

2.1 Rendite intere.

Osserviamo che quando poniamo il tempo $t = 1$ (nel $RFIC$) si ha:

$$r(1) = r = 1 + i$$
$$v(1) = v = (1 + i)^{-1} = \frac{1}{1+i}$$
$$i(1) = i$$
$$d(1) = d$$

mentre se consideriamo un'epoca generica t avremo:

$$v(t) = (1 + i)^{-t} = v^t$$
$$r(t) = (1 + i)^t = r^t$$

Definiamo adesso una **rendita** come una successione di pagamenti scadenzati nel tempo. Ogni pagamento prende il nome di **rata** della rendita. Indicheremo con R_1 la rata al tempo $t_1$ed in maniera generica R_n la rata al tempo t_n.

Come caso particolare possiamo considerare una rendita con rate costanti:

$$R_1 = R_2 = \cdots = R_h = \cdots = R_n = R$$

e periodiche:

$$t_h - t_{h-1} = 1 \qquad \forall h$$

Nelle prossime formule utilizzeremo sempre una rata costante unitaria $R = 1$.

Consideriamo una **rendita posticipata** (ossia ogni rata è posta al termine del periodo a cui si riferisce) con $n = 4$. Lo scadenzario di questa rendita è

$$(1; 1; 1; 1)/(1; 2; 3; 4)$$

mentre il valore attuale si ottiene attualizzando all'epoca zero tutte le sue rate, perciò:

$$VA = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4}$$

La rendita appena vista si chiama **rendita immediata unitaria posticipata.** Riepiloghiamone le caratteristiche:

- *immediata:* il primo pagamento si effettua al primo anno (altrimenti si chiama *differita*);

- *unitaria*: $R = 1$;

- *posticipata*: ossia ogni rata è posta al termine del periodo a cui si riferisce (altrimenti si chiama *anticipata*).

Nel caso in cui il numero delle rate è pari a n, il suo valore attuale sarà:

$$VA = v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{1-v^{-n}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{n\rceil\ i}$$

Il simbolo $a_{n\rceil\ i}$ si chiama "a figurato n al tasso i".

Il montante della rendita si ottiene capitalizzando tutte le rate all'epoca finale (oppure capitalizzando direttamente il valore attuale della rendita fino all'epoca finale). In simboli avremo:

$$M = r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{(1+i)^n-1}{i} = s_{n\rceil\ i}$$

dove, in maniera analoga, Il simbolo $s_{n\rceil\ i}$ si chiama "s figurato n al tasso i".

Si avrà ovviamente:

$$s_{\overline{n}|\,i} = a_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^n$$

Esempio.

Consideriamo una rendita unitaria immediata posticipata con $n = 4$ e $i = 10\%$. Calcoliamone il valore attuale ed il montante. Lo scadenzario di questa rendita è: $(1;1;1;1)/(1;2;3;4)$.

Si ha:

$$a_{\overline{4}|\,0,10} = \frac{1}{1,10} + \frac{1}{(1,10)^2} + \frac{1}{(1,10)^3} + \frac{1}{(1,10)^4} = \frac{1-(1,10)^{-4}}{0,10} = 3,17$$

$$s_{\overline{4}|\,0,10} = (1,10)^3 + (1,10)^2 + 1,10 + 1 = 4,64 = \frac{(1,10)^4-1}{0,10} = a_{\overline{4}|\,0,10} \cdot (1,10)^4$$

Nel caso di una rendita immediata unitaria **anticipata**, la prima rata è pagata all'epoca zero, mentre l'ultima rata è pagata all'epoca $n-1$.

Il valore attuale ed il montante sono determinati nel modo seguente:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|\,i} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{d} = a_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|\,i} = \frac{(1+i)^n-1}{d}$$

Nel caso di una rendita unitaria posticipata **differita**, c'è un periodo da 0 a t di differimento, ossia la prima rata è pagata all'epoca t, mentre l'ultima è pagata all'epoca $t+n$.Per calcolare il valore attuale di una tale rendita, dovremo tener conto del periodo di differimento. In formule avremo:

$${}_{t|}a_{\overline{n}|\,i} = v^{t+1} + v^{t+2} + \cdots + v^{t+n} = v^t \cdot \left(v + v^2 + \cdots + v^n\right) = v^t \cdot a_{\overline{n}|\,i}$$

Possiamo adesso dedurre l'espressione per calcolare il montante di tale rendita, come montante del valore attuale:

$${}_{t|}s_{\overline{n}|\,i} = (1+i)^{t+n} \cdot {}_{t|}\, a_{\overline{n}|\,i} = (1+i)^{t+n} \cdot v^t \cdot a_{\overline{n}|\,i} = (1+i)^n \cdot a_{\overline{n}|\,i}$$

Esaminiamo una variante di quest'ultima tipologia: la rendita unitaria anticipata differita. In questo caso, le rate stanno all'inizio di ogni periodo. Avremo perciò:

$${}_{t|}\ddot{a}_{\overline{n}|\,i} = v^t + v^{t+1} + \cdots + v^{t+n-1} = v^t \cdot \left(1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}\right) = v^t \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|\,i}$$

Infine il montante si ottiene capitalizzando il valore attuale.

Osserviamo che valore attuale e montante di tutte le tipologie di rendite sono riconducibili ad un'espressione contenente $a_{\overline{n}|\,i}$.

Una rendita **perpetua** immediata posticipata possiede invece infinite rate. Il valore attuale si ottiene con un passaggio al limite:

$$a_{\overline{\infty}|\,i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|\,i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$$

tenendo conto che

$$\lim_{n\to\infty}(1+i)^{-n} = 0.$$

2.2 Rendite frazionate.

Una rendita è **frazionata** quando la rata non è pagata al termine dell'anno o all'inizio di esso, ma è frazionata in $m-esimi$ di anno, ovvero la rata unitaria è suddivisa in m piccole rate, ciascuna di importo $1/m$ che sono pagate alle epoche $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}, \frac{m}{m} = 1$.

Esempio.

Se prendiamo $n = 3$ e $m = 2$ abbiamo una rendita triennale frazionata in semestri, il cui scadenzario è:

$$(1/2; 1/2; 1/2; 1/2; 1/2; 1/2)/(1/2; 1; 3/2; 2; 5/2; 3).$$

Il valore attuale della rendita si ottiene sempre attualizzando tutte le rate. Avremo perciò:

$$a^{(m)}_{n\rceil\, i} = \frac{1}{m} \cdot v^{1/m} + \frac{1}{m} \cdot v^{2/m} + \cdots + \frac{1}{m} \cdot v^n = \frac{1}{m} \cdot \left(v^{1/m} + v^{2/m} + \cdots + v^n\right) =$$
$$= \frac{1}{m} \cdot a_{n\cdot m\rceil\, i_{1/m}} = \frac{1-v^n}{J(m)}$$

Abbiamo in effetti una rendita con $n \cdot m$ rate pari ad $\frac{1}{m}$ ogni $m - esimo$ di anno.

Riprendiamo l'esempio precedente con $i = 21\%$. Avremo:

$$a^{(2)}_{3\rceil\, 0,21} = \frac{1-(1,21)^{-3}}{J(2)} = \frac{1-(1,21)^{-3}}{2\cdot 0,10} = 2,1776$$

Si trova analogamente:

$$a^{(2)}_{3\rceil\, 0,21} = \frac{1}{2} \cdot a_{6\rceil\, i_{1/2}} = 2,1776.$$

dopo aver ricavato preliminarmente $i_{1/2} = 0,10$.

2.3 Rendite non unitarie.

Dopo aver analizzato le rendite unitarie, possiamo passare alle rendite la cui rata costante è pari a R.

Il valore attuale ed il montante di una rendita posticipata con rate R costanti valgono:

$$VA = R \cdot a_{n\rceil\, i}$$
$$M = R \cdot s_{n\rceil\, i}$$

Si procede in maniera analoga per tutte le altre tipologie di rendite non unitarie.

In generale, le rendite sono caratterizzate da quattro grandezze: VA (oppure equivalentemente M), la rata R, la durata n ed il tasso i. Note tre di queste grandezze, si può sempre determinare la quarta.

Esempi.

1) Calcolare VA se $R = 350$, $n = 5$ e $i = 12\%$.

Applichiamo la formula nota:

$$VA = R \cdot a_{n\rceil\, i} = 350 \cdot a_{5\rceil\, 0,12} = 350 \cdot \frac{1-(1,12)^{-5}}{0,12} = 1.262$$

2) Come nel problema precedente se le rate sono anticipate.

Applichiamo la formula nota:

$$VA = R \cdot \ddot{a}_{n\rceil\, i} = 350 \cdot \ddot{a}_{5\rceil\, 0,12} = 350 \cdot \frac{1-v^n}{d} =$$
$$= 350 \cdot \frac{1-(1,12)^{-5}}{\frac{0,12}{1,12}} = 1.413 = 1.262 \cdot 1,12$$

3) Siano dati $R = 350$, $n = 5$ e $i = 12\%$. Calcolare il montante della rendita.

Applichiamo la formula nota:

$$M = R \cdot s_{n\rceil\, i} = 350 \cdot s_{5\rceil\, 0,12} = 350 \cdot \frac{(1,12)^5-1}{0,12} = 2.223 =$$
$$= 350 \cdot a_{5\rceil\, 0,12} \cdot (1,12)^5$$

4) Siano dati $R = 350$, $n = 5$ e $i = 12\%$. Calcolare il montante della rendita differita con $t = 3$.

Lo scadenzario di questa rendita è:

$$(0;0;0;350;350;350;350;350)/(1;2;3;4;5;6;7;8).$$

Applichiamo la formula nota:

$$VA = R \cdot v^t \cdot a_{n\rceil\ i} = 350 \cdot 1,12^{-3} \cdot a_{5\rceil\ 0,12} = 898.$$

5) Siano dati $VA = 500$, $n = 4$ ed $i = 12\%$. Calcolare la rata della rendita posticipata.

Applichiamo la formula seguente:

$$R = \frac{VA}{a_{n\rceil\ i}} = \frac{500}{a_{4\rceil\ 0,12}} = \frac{500}{\frac{1-(1,12)^{-4}}{0,12}} = 165.$$

6) Supponiamo che l'incognita sia la durata. Ricaviamo una relazione generale che consente di determinare n.

Partiamo dalla relazione generale:

$$VA = R \cdot a_{n\rceil\ i} = R \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

perciò

$$\frac{VA}{R} \cdot i = 1 - v^n \Longrightarrow v^n = 1 - \frac{VA}{R} \cdot i$$

Applichiamo il logaritmo ad entrambi i membri:

$$\log(v^n) = n \cdot \log v = \log\left(1 - \frac{VA}{R} \cdot i\right)$$

ed infine:

$$n = \frac{\log\left(1-\frac{VA}{R}\cdot i\right)}{\log v} = -\frac{\log\left(1-\frac{VA}{R}\cdot i\right)}{\log(1+i)}$$

Vediamo un'applicazione numerica con $VA = 1.262$, $i = 12\%$ e $R = 350$.

Si ha:

$$n = -\frac{\log\left(1-\frac{1.262}{350}\cdot 0,12\right)}{\log(1,12)} \simeq 5.$$

7) Siano dati $VA = 1.000$, $n = 5$ e $R = 350$. Calcolare il tasso i.

Dalla relazione generale

$$VA = R \cdot a_{n\rceil\ i} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

si deduce:

$$i = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{VA}{R}}$$

Da questa relazione vediamo che non è possibile (tranne che in casi particolari) esplicitare i rispetto alle altre variabili. Dobbiamo utilizzare dei metodi di approssimazione numerica per stimare il valore di i.

Illustriamo il metodo dell'**iterazione.** Opero come segue: scelgo un tasso arbitrario, ad esempio il 27%, e lo inserisco al secondo membro dell'ultima relazione. Il valore ottenuto lo chiamo i_1:

$$i_1 = \frac{1-(1,27)^{-5}}{2,857} = 0,2450$$

Adesso poniamo i_1 al secondo membro e chiamo il risultato i_2 :

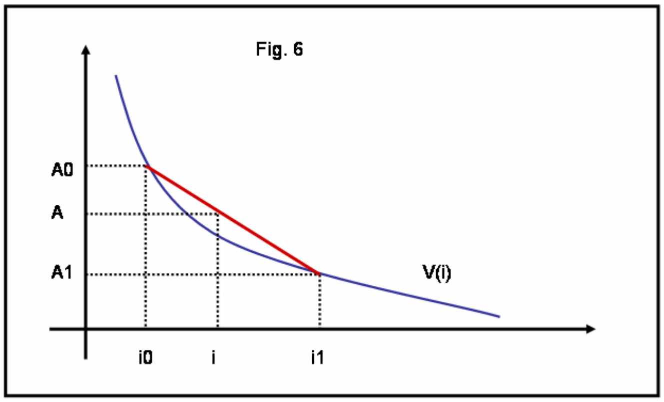
$$i_2 = \frac{1-(1,2450)^{-5}}{2,857} = 0,2397.$$

Ripetiamo questa procedura:

$$i_3 = \frac{1-(1,2397)^{-5}}{2,857} = 0,2305$$

$$i_4 = 0,2219$$

$$i_5 = 0,2213$$



⋮

Dopo un certo numero di tappe, osservo che il tasso ottenuto si stabilizza attorno ad un valore particolare che assumeremo come la nostra soluzione (i tassi iterati i_n convergono asintoticamente verso il tasso reale). Il tasso di partenza scelto ad arbitrio potrà essere sia maggiore sia minore del tasso reale.

Prendiamo gli stessi dati ed illustriamo ora il metodo dell'**interpolazione lineare.**

Il tasso esatto i dovrà soddisfare la relazione:

$$1.000 = 350 \cdot a_{5\rceil\ i}$$

Diamo alcuni valori arbitrari ad i e determiniamo il corrispondente valore che assume il secondo membro. Abbiamo la tabella seguente:

i	A
$12,50\%$	$1.246,2$
$15,00\%$	$1.173,3$
$17,50\%$	$1.107,0$
$i_0 = 20,00\%$	$A_0 = 1.046,7$
$i_1 = 22,50\%$	$A_1 = 991,7$

Siccome il valore attuale di una rendita è una funzione decrescente del tasso, il tasso reale dovrà essere compreso tra il 20% ed il $22,50\%$ (per questi tassi il valore attuale della rendita è rispettivamente maggiore e minore del valore esatto 1.000.

Il metodo dell'interpolazione lineare ipotizza che il tasso reale si trovi, con buona approssimazione, sul segmento che congiunge i punti di coordinate $(i_0; A_0)$ ed $(i_1; A_1)$ in corrispondenza dell'ordinata A. Ovviamente l'approssimazione sarà più precisa se le due soglie sono molto vicine al tasso reale (vedere figura 6).

Ricordando l'equazione di una retta passante per due punti assegnati, il tasso approssimato $\tilde{\imath}$ dovrà soddisfare la relazione:

$$\tilde{\imath} = i_0 + \frac{i_1 - i_0}{A_1 - A_0} \cdot (A - A_0).$$

Nel nostro caso avremo:

$$\tilde{\imath} = 0,20 + \frac{0,2250 - 0,20}{991,7 - 1.046,7} \cdot (1.000 - 1.046,7) = 0,2212$$

8) Siano dati $VA = 819,4$, $n = 11$ ed $R = 135$. Calcolare il tasso i.

L'equazione che dovremo risolvere è:

$$819,4 = 135 \cdot a_{11\rceil\, i}$$

Procediamo con il metodo dell'interpolazione lineare. Diamo dei valori arbitrari ad i che visualizziamo nella tabella seguente:

i	A
8%	$963,8$
9%	$918,7$
10%	$876,8$
$i_0 = 11\%$	$A_0 = 837,9$
$i_1 = 12\%$	$A_1 = 801,6$
13%	$767,7$

Vediamo subito che le due soglie più adatte sono $i_0 = 11\%$ e $i_1 = 12\%$. Applichiamo perciò la formula dell'interpolazione con questi valori:

$$\tilde{\imath} = 0,11 + \frac{0,12 - 0,11}{801,6 - 837,9} \cdot (819,4 - 837,9) = 0,11509$$

Esercizi di riepilogo.

1) Calcolare quale versamento semestrale (posticipato) per cinque anni porta ad accumulare un capitale di 8.500 euro, se il tasso d'interesse è il $7,50\%$ annuo (nel $RFIC$).

Abbiamo perciò una rendita frazionata posticipata immediata il cui montante è noto.

Sia la formula del montante:

$$M = m \cdot R \cdot s^{(m)}_{n\rceil\, i} = m \cdot R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{J(m)} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i_{1/m}}$$

con

$$i_{1/2} = \sqrt{1 + 0,075} - 1 = 0,03682$$

perciò sostituendo i dati:

$$8.500 = R \cdot \frac{(1+0,075)^5 - 1}{0,03682} = R \cdot 11,8306$$

$$\Longrightarrow R = \frac{8.500}{11,8306} = 718,4709$$

Possiamo ovviamente utilizzare la formula equivalente:

$$M = R \cdot s_{n \cdot m\rceil\, i_{1/m}} = R \cdot \frac{(1+i_{1/m})^{n \cdot m} - 1}{i_{1/m}} = R \cdot \frac{(1+0,03682)^{10} - 1}{0,03682}$$

2) A fronte di un investimento si può contare su cinque entrate costanti posticipate di importo pari a 50.000 euro, la prima delle quali fra tre anni. Calcolare il valore dell'investimento utilizzando un tasso del 15% annuo (nel $RFIC$).

Lo scadenzario dell'investimento è:

$$(0; 0; R, R, R, R, R)/(1; 2; 3; 4; 5; 6; 7)$$

che possiamo trattare come rendita posticipata differita con differimento $t = 2$.

Il valore di tale rendita sarà perciò:

$$VA = R \cdot {}_{t|} a_{\overline{n}|\, i} = 50.000 \cdot {}_{2|} a_{\overline{5}|\, 0,15} =$$
$$= 50.000 \cdot (1 + 0,15)^{-2} \cdot \frac{1-(1+0,15)^{-5}}{0,15} = 126.734,7351$$

3) Una rendita possiede rate costanti pari a 500 e durata quadriennale. Considerando un tasso istantaneo $\delta = 0,05$ calcolare le quattro rate di una seconda rendita equivalente con le seguenti caratteristiche: la seconda rata è il doppio della prima, la terza è il doppio della seconda e la quarta è il doppio della terza.

Ricordiamo che due rendite sono **equivalenti** se hanno lo stesso valore attuale (oppure lo stesso montante).

Noto il tasso istantaneo, possiamo intanto determinare il tasso annuo:

$$i = e^{\delta} - 1 = 0,051271$$

Determiniamo il valore attuale della prima rendita:

$$VA_1 = R \cdot a_{\overline{n}|\, i} = 500 \cdot \frac{1-(1+0,051271)^{-4}}{0,051271} = 1.767,75$$

Lo scadenzario della seconda rendita sarà:

$$(R; 2R; 4R; 8R)/(1; 2; 3; 4)$$

dove l'incognita è la prima rata R. Calcoliamo il valore attuale di questa rendita (ovviamente non possiamo utilizzare l'"a figurato" perché le rate non sono costanti):

$$VA_2 = R \cdot (1+i)^{-1} + 2R \cdot (1+i)^{-2} + 4R \cdot (1+i)^{-3} + 8R \cdot (1+i)^{-4} =$$
$$= R \cdot \left[(1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} + 4(1+i)^{-3} + 8(1+i)^{-4}\right] =$$
$$= R \cdot 12,75358 = VA_1 = 1.767,75$$

Dall'equivalenza delle due rendite otteniamo quindi:

$$R = \frac{1.767,75}{12,75358} = 138,6083$$

ed infine le altre rate saranno $2R$, $4R$ e $8R$.

4) Una rendita ha durata quadriennale e rate costanti pari a 100; utilizzando il tasso del 5% calcolare l'importo della rata semestrale di una rendita frazionata in semestri di pari durata (quattro anni) finanziariamente equivalente alla precedente.

Determiniamo il valore attuale della prima rendita:

$$VA_1 = R \cdot a_{\overline{4}|\, 0,05} = 100 \cdot \frac{1-(1+0,05)^{-4}}{0,05} = 354,595$$

Per quanto riguarda la seconda rendita, avremo:

$$VA_2 = R \cdot a_{\overline{n \cdot m}|\, i_{1/m}} = R \cdot a_{\overline{8}|\, i_{1/2}}$$

Ricaviamo il tasso semestrale equivalente:

$$i_{1/2} = \sqrt{1 + 0,05} - 1 = 0,024695$$

perciò:

$$VA_2 = R \cdot \frac{1-(1+0,024695)^{-8}}{0,024695} = R \cdot 17,179468.$$

Infine dalla relazione $VA_1 = VA_2$ avremo:

$$R = \frac{354,595}{17,179468} = 49,36271$$

5) Una rendita quadriennale possiede rate in progressione aritmetica. Sapendo che la prima rata vale 150, determinare le rimanenti rate in modo che la rendita data sia

equivalente ad una rendita perpetua con rate pari ad 80. La struttura costante dei tassi è fornita da $\delta = 0,13$.

Indichiamo con x la ragione incognita delle rate, lo scadenzario della rendita sarà:

$$(150; 150 + x; 150 + 2x; 150 + 3x)/(1; 2; 3; 4)$$

Il valore attuale di questa rendita sarà:

$$VA_1 = 150 \cdot v + (150 + x) \cdot v^2 + (150 + 2x) \cdot v^3 + \\ +(150 + 3x) \cdot v^4$$

dove

$$v = (1 + i)^{-1} = e^{-\delta} = 0,87809$$

Il valore attuale della seconda rendita (perpetua) sarà:

$$VA_1 = \frac{R}{i} = \frac{R}{e^{\delta}-1} = \frac{80}{0,138828} = 576,2526$$

Imponendo infine $VA_1 = VA_2$ per l'equivalenza delle due rendite si ottiene un'equazione algebrica di primo grado nell'incognita x la cui risoluzione fornisce $x = 35,34204$. Conoscendo la ragione, possiamo dedurre le quattro rate: $R_1 = 150$; $R_2 = 185,34$; $R_3 = 220,68$; $R_4 = 256,03$.

6) Una partita di merce viene pagata in otto rate mensili di cui:

- le prime due pari al 20% del prezzo per contanti, fissato in $1.000.000$, corrisposte in via anticipata immediata;

- le rimanenti costanti e versate regolarmente dal termine del terzo mese.

Calcolare le rate in questione se l'operazione viene effettuata al tasso del 15% annuo (nel $RFIC$).

Lo scadenzario sarà:

$$(200.000; 200.000; 0; R; R; R; R; R; R)/ \\ (0; \tfrac{1}{12}; \tfrac{2}{12}; \tfrac{3}{12}; \tfrac{4}{12}; \tfrac{5}{12}; \tfrac{6}{12}; \tfrac{7}{12}; \tfrac{8}{12})$$

Questa rendita è costituita da una rendita anticipata e da una rendita differita con differimento pari a due periodi. Determiniamo il tasso mensile equivalente:

$$i_{1/12} = (1,15)^{1/12} - 1 = 0,011715$$

Imponiamo quindi che il valore attuale di questa rendita sia pari a $1.000.000$:

$$200.000 \cdot \ddot{a}_{2\rceil\ i_{1/12}} + R \cdot {}_{2|}a_{6\rceil\ i_{1/12}} = 1.000.000$$

Otteniamo perciò un'equazione nell'incognita R.

Esplicitiamo x :

$$R = \frac{1.000.000 - 200.000 \cdot \ddot{a}_{2\rceil\ i_{1/12}}}{{}_{2|}a_{6\rceil\ i_{1/12}}} = \frac{1.000.000 - 200.000 \cdot 1,9884}{5,62884} = 107.006$$

7) Sapendo che la forza d'interesse vigente sul mercato è $\delta(t) = \alpha \cdot t + \frac{1}{3}\beta \cdot t^2$ con $\alpha = 0,001$ e $\beta = 0,002$, determinare l'importo x affinché la rendita

$$(100; 200; 300; 400)/(1; 2; 3; 4)$$

sia equivalente ad una rendita quadriennale con rate in progressione aritmetica di primo termine x e ragione 50.

L'integrale della forza d'interesse è:

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t \left(\alpha \cdot s + \tfrac{1}{3}\beta \cdot s^2\right)\, ds = \alpha \cdot \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{1}{3}\beta \cdot \tfrac{t^3}{3}$$

perciò possiamo determinare i fattori di sconto:

$$v(1) = e^{-\int_0^1 \delta(s)\, ds} = 0,99928$$
$$v(2) = e^{-\int_0^2 \delta(s)\, ds} = 0,99623$$
$$v(3) = e^{-\int_0^3 \delta(s)\, ds} = 0,98955$$
$$v(4) = e^{-\int_0^4 \delta(s)\, ds} = 0,97802$$

Possiamo adesso determinare il valore attuale della prima rendita:

$$VA_1 = 100 \cdot v(1) + 200 \cdot v(2) + 300 \cdot v(3) + 400 \cdot v(4) = 987,2493$$

Lo scadenzario della seconda rendita è:

$$(x; x + 50; x + 100; x + 150)/(1; 2; 3; 4)$$

Il valore attuale é

$$VA_2 = x \cdot v(1) + (x + 50) \cdot v(2) + (x + 100) \cdot v(3) + (x + 150) \cdot v(4).$$

Imponendo adesso l'equivalenza delle due rendite, ossia $VA_1 = VA_2$, otteniamo un'equazione lineare nell'incognita x la cui soluzione è $x = 174,556$.

3 Piani di ammortamento.

3.1 Considerazioni generali.

Un **piano di ammortamento** consiste nella restituzione di un importo preso a prestito mediante il versamento d'importi minori via via nel tempo.

Vediamo quali sono gli elementi che caratterizzano i piani d'ammortamento.

Indichiamo con S l'importo prestato e con $C_1, \ldots, C_n$ le **quote capitale** versate (dove C_h rappresenta la quota capitale versata al generico periodo h, mentre n rappresenta l'ultimo periodo, ossia la durata del piano d'ammortamento stesso). Vale la relazione:

$$\sum_{h=1}^{n} C_h = S$$

ossia la somma di tutte le quote capitale deve ridare l'importo prestato.

Ovviamente, il debitore non dovrà restituire solamente l'importo prestato ma anche gli interessi maturati ad ogni periodo. Un'altra caratteristica dei piani d'ammortamento sarà perciò il tasso di remunerazione del prestito i (che ipotizzeremo costante per tutta la durata del piano). Le quote interessi, che indicheremo con I_h (con $h = 1, \ldots, n$), rappresentano un costo per il debitore ma un guadagno per il creditore. Saranno calcolate ad ogni periodo sulla base della parte di debito non ancora rimborsata:

$$\begin{gathered} I_1 = i \cdot S \\ I_2 = i \cdot (S - C_1) \\ I_3 = i \cdot (S - C_1 - C_2) \\ \vdots \\ I_n = i \cdot (C_n) \end{gathered}$$

Il **debito residuo** D_h all'epoca h rappresenta l'importo da restituire all'epoca h (con $h = 1, \ldots, n$). Possiamo calcolarlo in due maniere:

♦ visione prospettiva (come somma delle quote capitale ancora da pagare):

$$D_h = \sum_{j=h+1}^{n} C_h$$

♦ visione retrospettiva (come somma delle quote capitale già pagate, dedotte dal debito iniziale):

$$D_h = S - \sum_{j=1}^{h} C_h$$

Deve valere inoltre l'ovvia relazione $D_n = 0$.

Possiamo adesso definire nuovamente le quote interesse attraverso il debito residuo nel modo seguente:

$$I_h = D_{h-1} \cdot i$$

Ad ogni periodo il debitore dovrà versare una quota capitale ed una quota interesse: la somma algebrica di queste due quote prende il nome di **rata**. Avremo perciò:

$$R_h = C_h + I_h \qquad h = 1, \ldots, n$$

Le rate dovranno soddisfare la seguente relazione (ci poniamo sempre nel $RFIC$):

$$\sum_{h=1}^{n} R_h \cdot (1+i)^{-h} = S$$

ossia la somma dei valori attuali delle rate deve uguagliare l'importo prestato (l'importo prestato sarà quindi il valore attuale di una rendita avente per rate le rate del piano d'ammortamento).

Rappresenteremo un piano d'ammortamento sotto forma di una tabella che avrà per colonne rispettivamente l'epoca, la quota capitale, la quota interesse, la rata ed il debito residuo.

Esempio.

Consideriamo il seguente piano d'ammortamento (rimborso graduale) con $S = 1.000$, $n = 5$, $i = 10\%$.

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	1.000
1	300	100	400	700
2	100	70	170	600
3	200	60	260	400
4	100	40	140	300
5	300	30	330	0

Come possiamo osservare, tutte le relazioni elencate precedentemente sono soddisfatte. Ad esempio:

$$\frac{400}{1{,}10} + \frac{170}{(1{,}10)^2} + \frac{260}{(1{,}10)^3} + \frac{140}{(1{,}10)^4} + \frac{330}{(1{,}10)^5} = 1.000$$

Osserviamo che il debito residuo può essere determinato anche attraverso le rate.

♦ Visione prospettiva:

$$D_h = R_{h+1} \cdot v + \cdots + R_n \cdot v^{n-h} = \sum_{j=h+1}^{n} R_h \cdot v^{j-h}$$

♦ Visione retrospettiva:

$$D_h = S \cdot (1+i)^h - R_1 \cdot (1+i)^{h-1} - R_2 \cdot (1+i)^{h-2} - \cdots - R_h =$$
$$= S \cdot (1+i)^h - \sum_{j=1}^{h} R_j \cdot (1+i)^{h-j}$$

Nel caso dell'esempio precedente avremo:

$$D_2 = C_3 + C_4 + C_5 = 200 + 100 + 300 = 600$$
$$D_2 = \frac{R_3}{1+i} + \frac{R_4}{(1+i)^2} + \frac{R_5}{(1+i)^3} = 600$$

Utilizzando la valutazione retrospettiva avremo lo stesso risultato:

$$D_2 = S - C_1 - C_2 = 1.000 - 300 - 100 = 600$$
$$D_2 = S \cdot (1+i)^2 - R_1 \cdot (1+i) - R_2 =$$
$$= 1.000 \cdot (1,10)^2 - 400 \cdot 1,10 - 170 = 600$$

3.2 Ammortamento italiano.

L'ammortamento **italiano** è caratterizzato dal fatto che tutte le quote capitale sono costanti, ossia

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = C$$

perciò:

$$n \cdot C = S \Longrightarrow C = \frac{S}{n}$$

Gli altri elementi del piano d'ammortamento assumono una forma semplificata. Ad esempio, per quanto riguarda il debito residuo:

♦ visione prospettiva:

$$D_h = \frac{S}{n} \cdot (n-h)$$

♦ visione retrospettiva:

$$D_h = S - \frac{S}{n} \cdot h$$

Per quanto riguarda le quote interessi:

$$I_h = D_{h-1} \cdot i = \frac{S}{n} \cdot (n-h+1) \cdot i$$

oppure equivalentemente:

$$I_h = \left[S - \frac{S}{n} \cdot (h-1)\right] \cdot i$$

Infine le rate si esprimono nel modo seguente:

$$R_h = C_h + I_h = \frac{S}{n} + \frac{S}{n} \cdot (n-h+1) \cdot i$$

Esercizi.

1) Stendere il piano di un ammortamento italiano con $S = 1.000$, $n = 5$ ed $i = 10\%$.

Avremo $C = \frac{1.000}{5} = 200$, mentre il piano completo è:

h	**C**$_h$	**I**$_h$	**R**$_h$	**D**$_h$
0	–	–	–	1.000
1	200	100	300	800
2	200	80	280	600
3	200	60	260	400
4	200	40	240	200
5	200	20	220	0

2) Stendere il piano di un ammortamento italiano con $S = 400.000$, $n = 8$ ed $i = 6,5\%$. Determinare quindi il debito residuo all'epoca 5.

Avremo $C = \frac{400.000}{8} = 50.000$ mentre, il piano completo è:

h	**C**$_h$	**I**$_h$	**R**$_h$	**D**$_h$
0	–	–	–	400.000
1	50.000	26.000	76.000	350.000
2	50.000	22.750	72.750	300.000
3	50.000	19.500	69.500	250.000
4	50.000	16.250	66.250	200.000
5	50.000	13.000	63.000	150.000
6	50.000	9.750	59.750	100.000
7	50.000	6.500	56.500	50.000
8	50.000	3.250	53.250	0

Il debito residuo $D_5 = 150.000$ può essere ottenuto come:

$$D_5 = C_6 + C_7 + C_8 = 50.000 + 50.000 + 50.000 = 150.000 =$$
$$= \frac{400.000}{8} \cdot (8-5) = \frac{S}{n} \cdot (n-h)$$

oppure tolgo le quote capitale già pagate:

$$D_5 = S - C_1 - C_2 - C_3 - C_4 - C_5 = S - \frac{S}{n} \cdot h =$$
$$= 400.000 - 50.000 \cdot 5 = 150.000.$$

Analogamente utilizzando la somma attualizzata delle rate rimanenti:

$$D_5 = \frac{R_6}{1+i} + \frac{R_7}{(1+i)^2} + \frac{R_8}{(1+i)^3} = \frac{59.750}{1{,}065} + \frac{56.500}{1{,}065^2} + \frac{53.250}{1{,}065^3} = 150.000$$

3) Stendere il piano di un ammortamento italiano con $S = 200$, $n = 2$ ed $i = 10,25\%$ e con quote interessi semestrali.

Osserviamo che sono semestrali solo le quote interessi, non quelle capitali.

Avremo

$$i_{1/2} = 0,05 \Longrightarrow J(2) = 0,10$$

Il piano d'ammortamento è:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	200
1/2	–	10	10	200
1	100	10	110	100
3/2	–	5	5	100
2	100	5	105	0

Verifichiamo la relazione cui devono soddisfare le rate:

$$\frac{10}{1{,}05} + \frac{110}{1{,}05^2} + \frac{5}{1{,}05^3} + \frac{105}{1{,}05^4} = 200$$

3.3 Ammortamento a rimborso unico.

L'ammortamento a **rimborso unico** prevede che non si rimborsa nulla fino all'epoca n. Le quote capitale valgono perciò:

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-1} = 0$$
$$C_n = S$$

Possiamo quindi dedurre il valore del debito residuo:

$$D_0 = D_1 = D_2 = \cdots = D_{n-1} = S$$
$$D_n = 0$$

e delle quote interessi:

$$I_1 = I_2 = \cdots = I_n = S \cdot i$$

Infine le rate valgono:

$$R_1 = R_2 = \cdots = R_{n-1} = S \cdot i$$
$$R_n = S + S \cdot i$$

Esercizi.

1) Stendere il piano di un ammortamento a rimborso unico con $S = 1.000$, $n = 5$ ed $i = 10\%$.

Utilizzando le relazioni precedenti si ha:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	$-$	$-$	$-$	1.000
1	0	100	100	1.000
2	0	100	100	1.000
3	0	100	100	1.000
4	0	100	100	1.000
5	1.000	100	1.100	0

2) Stendere il piano di un ammortamento a rimborso unico con $S = 100$, $n = 4$ ed $i = 5,0625\%$ e con rate semestrali.

Le quote capitale valgono (indichiamo i tempi in semestri):

$$I_h = S \cdot i_{1/2} = 2,5$$

dove

$$i_{1/2} = \sqrt{1+i} - 1 = 0,025$$

Abbiamo perciò:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	$-$	$-$	$-$	100
$1/2$	0	$2,5$	$2,5$	100
1	0	$2,5$	$2,5$	100
$3/2$	0	$2,5$	$2,5$	100
2	0	$2,5$	$2,5$	100
$5/2$	0	$2,5$	$2,5$	100
3	0	$2,5$	$2,5$	100
$7/2$	0	$2,5$	$2,5$	100
4	100	$2,5$	$102,5$	0

3.4 Ammortamento francese.

L'ammortamento **francese** prevede delle rate uguali:

$$R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R$$

Tenendo conto della proprietà generale riguardante le rate di un piano d'ammortamento (ossia la somma dei valori attuali delle rate uguaglia l'importo del debito), avremo:

$$S = \sum_{h=1}^{n} R_h \cdot (1+i)^{-h} = \sum_{h=1}^{n} R \cdot (1+i)^{-h} = R \cdot \sum_{h=1}^{n} (1+i)^{-h} = R \cdot a_{n\rceil\, i}$$

dalla quale potremo ricavare il valore della rata costante:

$$R = \frac{S}{a_{n\rceil\, i}}$$

Per quanto riguarda il debito residuo, avremo:

$$D_h = R \cdot (1+i)^{-1} + R \cdot (1+i)^{-2} + \cdots + R \cdot (1+i)^{-(n-h)} = R \cdot a_{n-h\rceil\, i}$$

Possiamo perciò dedurre il valore delle quote interessi:

$$I_h = D_{h-1} \cdot i = R \cdot a_{n-h+1\rceil\, i} \cdot i$$

Determiniamo ora il valore delle quote capitale:

$$C_h = R_h - I_h = R - I_h = R - R \cdot a_{n-h+1\rceil\, i} \cdot i =$$
$$= R \cdot \left[1 - \left(1 - (1+i)^{-n+h-1}\right)\right] = R \cdot v^{n-h+1}$$

ossia:

$$C_1 = R \cdot v^n$$
$$C_2 = R \cdot v^{n-1}$$
$$C_3 = R \cdot v^{n-2}$$
$$\vdots$$
$$C_n = R \cdot v$$

Le quote capitale variano quindi in progressione geometrica con primo termine pari a $R \cdot v^n$ e ragione $1 + i = v^{-1}$.

Esercizio.

1) Stendere il piano di un ammortamento francese con $S = 1.000$, $n = 5$ ed $i = 10\%$.

Determiniamo la rata costante:

$$R = \frac{S}{a_{n\rceil\, i}} = \frac{1.000}{a_{5\rceil\, 0,10}} = 263,8$$

Per quanto riguarda le quote capitale:

$$C_1 = R - I_1 = R - S \cdot i = 263,8 - 100 = 163,8$$
$$C_2 = 163,8 \cdot 1,10 = 180,18$$
$$C_3 = 180,18 \cdot 1,10 = 198,20$$
$$C_4 = 198,20 \cdot 1,10 = 218,02$$
$$C_5 = 218,02 \cdot 1,10 = 239,82$$

Si verifica ovviamente che $\sum_{h=1}^{5} C_h = 1.000$.

Il piano completo è:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	1.000
1	163,8	100	263,8	836,20
2	180,18	83,62	263,8	656,02
3	198,20	65,60	263,8	457,82
4	218,02	45,78	263,8	239,82
5	239,82	23,98	263,8	0

Esercizio (riepilogo).

Un individuo prende a prestito un importo di 100.000 e s'impegna a restituire in 10 anni al tasso effettivo annuo del 10% versando rate di un ammortamento italiano. Dopo cinque anni l'individuo, a seguito di una crisi finanziaria, non può più onorare i suoi impegni e paga solo la quota interesse per il sesto e settimo anno e nulla l'anno successivo. A questo punto si accorda con il finanziatore per estinguere il debito rimanente entro la scadenza prefissata, sempre in ammortamento italiano al nuovo tasso del 15%. Calcolare il tasso di costo dell'operazione per il debitore e determinare la successione delle rate effettivamente pagate.

I dati del problema sono $S = 100.000$, $n = 10$ ed $i = 10\%$.

Le quote capitale costanti valgono:

$$C = \frac{S}{n} = 10.000$$

Le prime cinque rate effettivamente pagate valgono:

$$R_1 = C_1 + I_1 = 10.000 + 10.000 = 20.000$$
$$R_2 = C_2 + I_2 = 10.000 + 9.000 = 19.000$$
$$R_3 = C_3 + I_3 = 10.000 + 8.000 = 18.000$$
$$R_4 = C_4 + I_4 = 10.000 + 7.000 = 17.000$$
$$R_5 = C_5 + I_5 = 10.000 + 6.000 = 16.000$$

Il debito residuo all'epoca cinque vale:

$$D_h = \frac{S}{n} \cdot (n - h) = 10.000 \cdot (10 - 5) = 50.000$$

Al sesto e settimo anno, il debitore paga soltanto gli interessi, perciò il debito residuo rimane immutato e le rate (pari alla sola quota interesse) valgono:

$$R_6 = I_6 = D_5 \cdot i = 5.000$$
$$R_7 = I_7 = D_6 \cdot i = 5.000$$

essendo

$$D_5 = D_6 = D_7 = 50.000$$

Durante l'ottavo anno il creditore non paga nulla, perciò il debito residuo si capitalizza per un anno. Avremo all'epoca 8:

$$R_8 = 0$$
$$D_8 = D_7 \cdot (1 + i) = 50.000 \cdot 1,10 = 55.000$$

Avremo perciò un nuovo piano d'ammortamento calcolato sul nuovo valore del debito D_8:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
8	–	–	–	55.000
9	27.500	8.250	35.750	27.500
10	27.500	4.125	31.625	0

Abbiamo quindi determinato le ultime due rate del piano d'ammortamento.

Infine, il tasso interno di costo ("TIC") è definito come quel tasso costante rispetto al quale la somma dei valori attuali delle rate fornisce il valore del debito. Il TIC dovrà perciò soddisfare la seguente equazione di equilibrio finanziario

$$100.000 = \frac{20.000}{1+i} + \frac{19.000}{(1+i)^2} + \frac{18.000}{(1+i)^3} + \frac{17.000}{(1+i)^4} + \frac{16.000}{(1+i)^5} +$$
$$+ \frac{5.000}{(1+i)^6} + \frac{5.000}{(1+i)^7} + \frac{0}{(1+i)^8} + \frac{35.750}{(1+i)^9} + \frac{31.625}{(1+i)^{10}}$$

Otteniamo un equazione algebrica di decimo grado che risolveremo con il metodo dell'interpolazione lineare. Considerando i dati del problema, sappiamo che il tasso cercato sarà compreso tra il 10% ed il 15%. Utilizziamo quindi queste due soglie per l'interpolazione:

$$i_0 = 0,10 \rightarrow A_0 = 102.000$$

$$i_1 = 0,15 \rightarrow A_1 = 95.000$$

Applichiamo infine la formula dell'interpolazione con questi dati:

$$\tilde{\imath} = 0,10 + \frac{0,15-0,10}{95.000-102.000} \cdot (100.000 - 102.000) \simeq 0,114.$$

3.5 Il preammortamento.

Il **preammortamento** è una situazione in cui non succede nulla per t anni in cui si pagano solo gli interessi e non le quote capitale. Si tratta quindi di una variante per qualsiasi piano d'ammortamento.

Abbiamo sotto forma di tabella:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	$-$	$-$	$-$	S
1	$-$	$S \cdot i$	$S \cdot i$	S
2	$-$	$S \cdot i$	$S \cdot i$	S
3	$-$	$S \cdot i$	$S \cdot i$	S
$\vdots$	$-$	$S \cdot i$	$S \cdot i$	S
t	$-$	$S \cdot i$	$S \cdot i$	S
$t+1$	C_1	I_1	$C_1 + I_1$	D_1
$t+2$	C_2	I_2	$C_2 + I_2$	D_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$t+n$	C_n	I_n	$C_n + I_n$	0

Esempio.

Consideriamo i dati seguenti: $S = 50.000.000$, $n = 5$, $i = 18\%$ e $t = 3$ (periodo di preammortamento).

Le quote capitale valgono, dal periodo $t+1$ al periodo $t+n$:

$$C = \frac{S}{n} = 10.000.000$$

Dall'epoca $zero$ all'epoca t le quote interesse valgono:

$$I = S \cdot i = 50.000.000 \cdot 0,18 = 9.000.000$$

Il piano completo sarà perciò (importi in milioni):

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	$-$	$-$	$-$	50
1	$-$	9	9	50
2	$-$	9	9	50
3	$-$	9	9	50
4	10	9	19	40
5	10	$7,2$	$17,2$	30
6	10	$5,4$	$15,4$	20
7	10	$3,6$	$13,6$	10
8	10	$1,8$	$11,8$	0

Nel caso di un ammortamento di tipo francese, il piano completo è:

h	C_h	I_h	R_h	D_h
0	–	–	–	50
1	–	9	9	50
2	–	9	9	50
3	–	9	9	50
4	$6,99$	9	$15,99$	$43,01$
5	$8,25$	$7,74$	$15,99$	$34,76$
6	$9,73$	$6,26$	$15,99$	$25,03$
7	$11,48$	$4,51$	$15,99$	$13,55$
8	$13,55$	$2,44$	$15,99$	0

Attualizziamo le rate del preammortamento italiano:

$$\frac{9}{1{,}18} + \frac{9}{1{,}18^2} + \cdots + \frac{11{,}8}{1{,}18^8} = 50$$

3.6 Ammortamento tedesco.

L'ammortamento **tedesco** (ammortamento a quote interessi anticipate) è una variante dei piani d'ammortamenti generali che prevede il pagamento delle quote interesse ad inizio anno (mentre le quote capitale sono sempre pagate a fine anno).

Partiamo da un piano d'ammortamento italiano con $S = 300$, $n = 3$ ed $i = 10\%$ il cui scadenzario è:

h	C_h	I_h	R_h	D_h
0	–	–	–	300
1	100	30	130	200
2	100	20	120	100
3	100	10	110	0

Abbiamo la relazione

$$\sum_{h=1}^{3} R_h \cdot (1,10)^{-h} = 300$$

Supponiamo ora che le quote interesse siano anticipate. Il piano d'ammortamento precedente si modifica nel modo seguente:

h	C_h	I_h	R_h	D_h
0	–	$300 \cdot \frac{0{,}10}{1{,}10} = 27,27$	$27,27$	300
1	100	$200 \cdot \frac{0{,}10}{1{,}10} = 18,18$	$118,18$	200
2	100	$100 \cdot \frac{0{,}10}{1{,}10} = 9,09$	$109,09$	100
3	100	0	100	0

La proprietà cui devono soddisfare le rate è sempre verificata:

$$27,27 + \frac{118{,}18}{1{,}10} + \frac{109{,}09}{1{,}10^2} + \frac{100}{1{,}10^3} = 300$$

Vediamo adesso le relazioni generali per l'ammortamento tedesco. Per quanto riguarda le quote interessi si ha:

$$I_0 = D_0 \cdot \frac{i}{1+i} = D_0 \cdot d$$
$$I_1 = D_1 \cdot \frac{i}{1+i} = D_1 \cdot d$$

$$\vdots$$
$$I_{n-1} = D_{n-1} \cdot \frac{i}{1+i} = D_{n-1} \cdot d$$
$$I_n = 0$$

Esempio.

Consideriamo un ammortamento a rimborso unico ad interessi anticipati con $S = 1.000$, $i = 18\%$ e $n = 5$.

Determiniamo preliminarmente $d = \frac{0,18}{1,18} = 0,1525$.

Il piano completo è:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	$152,5$	$152,5$	1.000
1	–	$152,5$	$152,5$	1.000
2	–	$152,5$	$152,5$	1.000
3	–	$152,5$	$152,5$	1.000
4	–	$152,5$	$152,5$	1.000
5	1.000	0	1.000	0

Verifichiamo la proprietà delle rate:

$$152,5 \cdot \ddot{a}_{5\rceil\ 0,18} + 1.000 \cdot (1,18)^{-5} = 1.000$$

Esempio.

Consideriamo un piano d'ammortamento francese ad interessi anticipati con $S = 50.000.000$, $i = 18\%$ e $n = 5$.

Le quote capitale valgono:

$$C_1 = R \cdot v^n = \frac{50.000.000}{\frac{1-1,18^{-5}}{0,18}} \cdot 1,18^{-5} = 6.990.000$$
$$C_2 = C_1 \cdot (1+i) = 8.250.000$$
$$C_3 = C_2 \cdot (1+i) = 9.730.000$$
$$\vdots$$

Il piano completo è (importi in milioni):

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	$7,63$	$7,63$	50
1	$6,99$	$6,56$	$13,55$	$43,01$
2	$8,25$	$5,30$	$13,55$	$34,76$
3	$9,73$	$3,82$	$13,55$	$25,03$
4	$11,48$	$2,07$	$13,55$	$13,55$
5	$13,55$	0	$13,55$	0

Le rate sono ovviamente costanti (tranne la prima che corrisponde alla prima quota interessi anticipata). Le quote interessi si ricavano dalla formula

$$I_h = D_h \cdot d \qquad (h = 0, \ldots, n-1).$$

3.7 Valutazione di un prestito.

Il **valore** di un prestito all'epoca generica h al tasso di valutazione j (scelto arbitrariamente, da non confondere con il tasso di remunerazione i del piano d'ammortamento) è definito come la somma dei valori attuali calcolati all'epoca h di tutte le rate successive all'epoca h. In simboli avremo:

$$V_h = \sum_{t=h+1}^{n} R_h \cdot (1+j)^{t-h}$$

dove n rappresenta l'epoca finale.

Il valore di un prestito può essere scisso nella somma di due componenti: la **nuda proprietà** (ottenuta attualizzando le quote capitale) e l'**usufrutto** (ottenuto attualizzando le quote interesse):

$$N_h = \sum_{t=h+1}^{n} C_h \cdot (1+j)^{t-h}$$

$$U_h = \sum_{t=h+1}^{n} I_h \cdot (1+j)^{t-h}$$

perciò vale ad ogni epoca h:

$$V_h = N_h + U_h$$

Esempio.

Consideriamo il seguente piano d'ammortamento con $S = 1.000$; $n = 5$ ed $i = 10\%$.

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	1.000
1	200	100	300	800
2	200	80	280	600
3	100	60	160	500
4	100	50	150	400
5	400	40	440	0

Vogliamo calcolare nuda proprietà ed usufrutto all'epoca tre al tasso di valutazione $j = 15\%$.

Utilizzando le definizioni viste si ottiene:

$$V_3 = \frac{150}{1{,}15} + \frac{440}{1{,}15^2} = 463,1$$

$$N_3 = \frac{100}{1{,}15} + \frac{400}{1{,}15^2} = 389,4$$

$$U_3 = \frac{50}{1{,}15} + \frac{40}{1{,}15^2} = 73,7$$

Esercizio.

Un prestito è restituito in cinque anni mediante il versamento di cinque quote capitale in progressione aritmetica di ragione 100 e primo termine 100 e pagamento degli interessi al 10% effettivo annuo. Dopo due anni il creditore cede i flussi residui ad un terzo soggetto. Costui paga un prezzo d'acquisto che gli consente di realizzare un rendimento dall'operazione pari al 12% pur in presenza di tassazione sulle quote interesse in base ad un'aliquota del 40%.

Stendere il piano di ammortamento completo e calcolare il prezzo pagato dal terzo soggetto per acquistare il debito residuo.

Utilizzando le note relazioni possiamo scrivere il piano d'ammortamento:

h	$\mathbf{C}_h$	$\mathbf{I}_h$	$\mathbf{R}_h$	$\mathbf{D}_h$
0	–	–	–	1.500
1	100	150	250	1.400
2	200	140	340	1.200
3	300	120	420	900
4	400	90	490	500
5	500	50	550	0

Mentre le quote capitale C_3, C_4 e C_5 sono acquistate dal terzo soggetto, sulle quote interessi ci sarà da togliere il 40%.

Siccome il rendimento è del 12%, il prezzo pagato sarà il valore attuale di ciò che deve essere incassato, ossia:

$$V_2 = \tfrac{300}{1{,}12} + \tfrac{400}{1{,}12^2} + \tfrac{500}{1{,}12^3} +$$
$$+ \left(\tfrac{120}{1{,}12} + \tfrac{90}{1{,}12^2} + \tfrac{50}{1{,}12^3} \right) \cdot (1 - 0,4) = 1.071,31$$

Osservazione. Il **tasso interno di costo** ("TIC") di un prestito è quel tasso in base al quale le rate pagate per la restituzione di un debito attualizzate all'epoca $zero$ risultano uguali al valore iniziale del debito stesso. Il TIC permette quindi di valutare la convenienza tra due alternative di finanziamento, accogliendo quella che presenta il TIC più basso.

Come verifica, possiamo calcolare il tasso interno di costo risolvendo l'equazione di equilibrio finanziario:

$$V(j) = \tfrac{300}{1+j} + \tfrac{400}{(1+j)^2} + \tfrac{500}{(1+j)^3} +$$
$$+ \left(\tfrac{120}{1+j} + \tfrac{90}{(1+j)^2} + \tfrac{50}{(1+j)^3} \right) \cdot (1 - 0,4) = 1.071,31$$

Si trova proprio $j = 12\%$.

Esercizio.

Un individuo si accorda per restituire un importo di 800.000 euro mediante il versamento di rate costanti semestrali per dieci anni al tasso effettivo annuo d'interesse del 5%. Dopo le prime otto rate semestrali versate regolarmente il debitore incontra un periodo di difficoltà finanziarie nel quale paga solo gli interessi per due semestri e sospende completamente il versamento delle rate per altri quattro semestri; a questo punto si accorda per restituire il prestito nei tempi previsti versando rate semestrali di un nuovo ammortamento francese condotto sul nuovo valore del debito D' al tasso annuo del 8%.

Calcolare:

- l'importo del debito residuo in corrispondenza dell'ultima epoca in cui i pagamenti avvengono regolarmente;

- il tasso di costo su base annua dell'operazione complessiva.

Determiniamo dapprima il tasso semestrale equivalente:

$$i_{1/2} = \sqrt{1,05} - 1 = 0,024695$$

La rata del piano d'ammortamento si deduce dalla formula vista per l'ammortamento francese (abbiamo un totale di venti rate semestrali):

$$R = \frac{S}{a_{20\rceil\ i_{1/2}}} = \frac{800.000}{15{,}6349} = 51.167,5494$$

Il debito residuo, tenendo conto delle rate ancora da versare, sarà:

$$DR_h = R \cdot a_{n-h\rceil\ i_{1/2}}$$

ossia:

$$DR_8 = R \cdot a_{12\rceil\ 0{,}02469} = 51.167,5494 \cdot \frac{1-1{,}024695^{-12}}{0{,}024695} = 525.851,203$$

Alle epoche 9 e 10 il debitore paga solo gli interessi:

$$I = I_9 = I_{10} = DR_8 \cdot i_{1/2}$$

mentre il debito residuo non cambia:

$$DR_8 = DR_9 = DR_{10}$$

Per i successivi quattro semestri, il debitore non paga nulla perciò il debito residuo si capitalizza per quattro semestri (o equivalentemente per due anni). Si avrà quindi:

$$DR_{14} = DR_8 \cdot (1+i)^2 = 579.739,46 = D'$$

Le ultime sei rate del nuovo ammortamento si trovano con la solita formula:

$$R' = \frac{D'}{a_{6\rceil\ j_{1/2}}} = \frac{579.739{,}46}{5{,}2553} = 110.315,198$$

dopo aver determinato il tasso semestrale equivalente:

$$j_{1/2} = \sqrt{1,08} - 1 = 0,03923.$$

Per la ricerca del TIC scriviamo l'equazione di equilibrio finanziario:

$$800.000 = R \cdot a_{8\rceil\ i_{1/2}} + I \cdot a_{2\rceil\ i_{1/2}} \cdot (1+i_{1/2})^{-8} + 0 + R' \cdot a_{6\rceil\ i_{1/2}} \cdot (1+i_{1/2})^{-14}$$

Risolviamo per interpolazione prendendo come soglie i tassi semestrali equivalenti al 5% ed al 8% annui. Si ha:

$$i_0 = 0,024695 \rightarrow A_0 = 820.224,47$$

$$i_1 = 0,03923 \rightarrow A_1 = 701.886,462$$

Applichiamo infine la formula dell'interpolazione con questi dati:

$$\tilde{i} = 0,024695 + \frac{0{,}03923-0{,}024695}{701.886{,}462-820.224{,}47} \cdot (800.000 - 820.224,47) \simeq 0,027175.$$

Infine il TIC su base annua sarà:

$$i = (1+0,027175)^2 - 1 = 0,05509.$$

Esercizi di riepilogo.

1) Un individuo di 40 anni di età sottoscrive un contratto che gli assicura una rendita perpetua differita posticipata annua dall'età di 65 anni. Ipotizzando che la rata della rendita sia di 2.000 e che il tasso di riferimento sia del 4%, calcolare quale sarà l'importo complessivo che l'individuo dovrà versare oggi a fronte della prestazione indicata. L'operatore dispone, inoltre, di una seconda alternativa: versare dieci rate annue posticipate invece dell'unico importo calcolato al punto precedente. Determinare l'importo delle rate in questione.

Il valore attuale della prima rendita perpetua sarà:

$$A = \frac{R}{i} = \frac{2.000}{0{,}04} = 50.000$$

Il valore attuale di tale somma all'epoca $zero$ (cioè passando da 65 a 40 anni) è:

$$A = 50.000 \cdot (1+0,04)^{-25} = 18.755,84$$

Infine, l'importo della rata della seconda rendita si ottiene uguagliando i valori attuali delle due rendite equivalenti:

$$18.755,84 = R \cdot a_{10\rceil\ 0{,}04} \Longrightarrow R = \frac{18.755{,}84}{a_{10\rceil\ 0{,}04}} = \frac{18.755{,}84}{8{,}1109} = 2.312,425$$

2) Un'operazione finanziaria prevede flussi bimestrali che variano in progressione aritmetica di primo termine 250.000 ed ultimo termine 400.000 con durata un anno. Calcolare il montante di tale operazione finanziaria al tasso del 12% annuo. Ricalcolare il valore in questione nel caso in cui la progressione delle rate fosse di tipo geometrico.

Conosciamo la prima e l'ultima rata ma non la ragione D. In generale, abbiamo la seguente relazione che lega la prima rata con la rata $n-esima$:

$$R_n = R_1 + (n-1) \cdot D$$

Nel nostro caso avremo perciò:

$$D = \frac{400.000-250.000}{5} = 30.000$$

La successione delle rate sarà (dividendo gli importi per 10.000):

$$(25; 28; 31; 34; 37; 40)$$

Per determinare il montante della rendita, calcoliamo il tasso bimestrale equivalente:

$$i_{1/6} = (1,12)^{1/6} - 1 = 0,01906$$

Capitalizziamo quindi tutte le rate fino al sesto bimestre:

$$\frac{M}{10.000} = 25 \cdot 1,01906^5 + 28 \cdot 1,01906^4 + 31 \cdot 1,01906^3 +$$
$$+34 \cdot 1,01906^2 + 37 \cdot 1,01906^1 + 40 = 203,4918$$
$$\Longrightarrow M = 2.034.918$$

Se le rate variano in progressione geometrica di ragione q, la relazione tra la prima rata e l'ultima rata sarà:

$$R_6 = R_1 \cdot q^5 \Longrightarrow q = \left(\frac{400.000}{250.000}\right)^{1/5} = 1,09856$$

Il montante si trova sempre con lo stesso procedimento:

$$\frac{M}{10.000} = 25 \cdot 1,01906^5 + 25 \cdot q \cdot 1,01906^4 + 25 \cdot q^2 \cdot 1,01906^3 +$$
$$+25 \cdot q^3 \cdot 1,01906^2 + 25 \cdot q^4 \cdot 1,01906^1 + 40 = 200,5478$$
$$\Longrightarrow M = 2.005.478$$

3) Dato un ammortamento francese per un'importo iniziale pari a 100.000 euro, di durata dieci anni, realizzato al tasso del 10% annuo d'interesse mediante il versamento di rate trimestrali, calcolare la rata ed il debito residuo dopo tre anni e mezzo.

Calcoliamo dapprima il tasso trimestrale equivalente:

$$i_{1/4} = (1 + 0,10)^{1/4} - 1 = 0,02411.$$

Il nostro piano d'ammortamento prevede 40 rate trimestrali di importo pari a:

$$R = \frac{100.000}{a_{40\rceil\ 0{,}02411}} = 3.924,39$$

Il debito residuo dopo 14 rate si ottiene dalla formula:

$$DR_{3,5} = R \cdot a_{40-14\rceil\ 0{,}02411} = 3.924,39 \cdot 19,1516 = 75.158,31$$

4) Un prestito di 100.000 viene ammortizzato con otto rate annue posticipate. Il tasso effettivo è del 10%. Le prime tre rate sono uguali. Ciascuna delle successive cinque è pari al doppio di quella iniziale. Calcolare:

- l'importo della rata iniziale R;

- il debito residuo all'epoca sei, dopo aver corrisposto la rata.

Lo scadenzario delle rate è il seguente:

$$(R;R;R;2R;2R;2R;2R;2R)/(1;2;3;4;5;6;7;8)$$

Osserviamo che non si tratta di un ammortamento francese: le rate non sono tutte uguali. Possiamo però calcolare il valore attuale della rendita scindendo le rate in due blocchi: una rendita immediata (le prime tre rate) ed una rendita differita di tre periodi (le ultime cinque). Abbiamo perciò:

$$100.000 = R \cdot a_{3\rceil\ 0,10} + 2R \cdot 1,10^{-3} \cdot a_{5\rceil\ 0,10}$$

da cui ricaviamo la rata:

$$R = \frac{100.000}{a_{3\rceil\ 0,10} + 2 \cdot 1,10^{-3} \cdot a_{5\rceil\ 0,10}} = 12.220,46.$$

Concludiamo con il debito residuo:

$$D_6 = 2R \cdot a_{2\rceil\ 0,10} = 2 \cdot 12.220,46 \cdot \frac{1-1,10^{-2}}{0,10} = 42.418,11$$

5) Un individuo prende a prestito 150.000 euro che s'impegna a restituire in dieci anni mediante il versamento di rate costanti quadrimestrali al 9% annuo d'interesse. Dopo sei anni inizia un periodo di difficoltà finanziaria che lo conduce a pagare i soli interessi per il settimo anno e nulla per l'ottavo. A questo punto si accorda per estinguere il prestito nei tempi inizialmente previsti mediante il versamento di rate ancora costanti e quadrimestrali calcolate all'11% annuo. Calcolare:

- la rata del primo ammortamento;

- il debito su cui viene ricalcolata la nuova rata all'epoca otto;

- il tasso di costo dell'operazione complessiva (che è necessariamente compreso tra i tassi d'ammortamento).

Determiniamo dapprima il tasso quadrimestrale equivalente:

$$i_{1/3} = 1,09^{1/3} - 1 = 0,02914$$

La rata del piano d'ammortamento si deduce dalla formula vista per l'ammortamento francese (abbiamo un totale di trenta rate quadrimestrali):

$$R = \frac{S}{a_{30\rceil\ i_{1/3}}} = \frac{150.000}{a_{30\rceil\ i_{1/3}}} = 7.568,07$$

Il debito residuo, tenendo conto delle rate ancora da versare, sarà:

$$DR_h = R \cdot a_{n-h\rceil\ i_{1/3}}$$

ossia:

$$DR_6 = R \cdot a_{12\rceil\ 0,02914} = 7.568,07 \cdot 10,0053 = 75.720,8$$

All'epoca 7 il debitore paga solo gli interessi:

$$I = DR_6 \cdot i_{1/3} = 2.206,50$$

mentre il debito residuo non cambia:

$$DR_7 = DR_6$$

All'epoca 8, il debitore non paga nulla perciò il debito residuo si capitalizza per un anno. Si avrà quindi:

$$DR_8 = DR_6 \cdot (1+i) = 75.720,8 \cdot 1,09 = 82.535,7$$

Le ultime sei rate del nuovo ammortamento si trovano con la solita formula:

$$R' = \frac{DR_8}{a_{6\rceil\ j_{1/3}}} = 15.509,7$$

dopo aver determinato il tasso quadrimestrale equivalente:

$$j_{1/3} = 1,11^{1/3} - 1 = 0,0354.$$

Per la ricerca del TIC scriviamo l'equazione di equilibrio finanziario:
$150.000 = R \cdot a_{18\rceil\ i_{1/3}} + I \cdot a_{3\rceil\ i_{1/3}} \cdot (1 + i_{1/3})^{-18} + 0 + R' \cdot a_{6\rceil\ i_{1/3}} \cdot (1 + i_{1/3})^{-24}$

Risolviamo per interpolazione prendendo come soglie i tassi quadrimestrali equivalenti al 9% ed all'11% annui. Si trova

$$\tilde{i} \simeq 0,02956.$$

Infine il TIC su base annua sarà $i \simeq 9,13\%$.

6) Un individuo si accorda per restituire un prestito mediante il versamento di cinque quote capitale di cui la prima pari a 50.000 euro e le altre ciascuna pari alla precedente moltiplicata per due; il tasso è pari al $7,5\%$. Calcolare:

- il debito residuo all'epoca tre;

- la nuda proprietà e l'usufrutto all'epoca due utilizzando il tasso del 9%.

La successione delle quote capitale è:

$C_1 = 50.000$; $C_2 = 100.000$; $C_3 = 200.000$; $C_4 = 400.000$; $C_5 = 800.000$.

Il debito residuo è:

$$D_3 = 400.000 + 800.000 = 1.200.000$$

Per quanto riguarda nuda proprietà ed usufrutto, applichiamo la definizione:

$$P_2 = 200.000 \cdot 1,09^{-1} + 400.000 \cdot 1,09^{-2} + 800.000 \cdot 1,09^{-3} =$$
$$= 1.137.905,02.$$

Il debito residuo alle altre epoche è:

$$D_2 = D_3 + C_3 = 1.400.000$$
$$D_4 = D_3 - C_4 = 800.000$$

Le quote interesse necessarie per determinare l'usufrutto sono:

$$I_3 = D_3 \cdot i = 1.400.000 \cdot 0,075 = 105.000$$
$$I_4 = D_4 \cdot i = 90.000$$
$$I_5 = D_5 \cdot i = 40.000$$

perciò:

$$U_2 = 105.000 \cdot 1,09^{-1} + 90.000 \cdot 1,09^{-2} + 40.000 \cdot 1,09^{-3} = 202.969$$

7) Un'azienda si finanzia emettendo un prestito obbligazionario dell'importo di $5.000.000$ euro che si impegna a rimborsare mediante un ammortamento a rimborso unico con rata annuale al $4,15\%$ in 12 anni. Calcolare nuda proprietà ed usufrutto del prestito al tasso di valutazione del 7%.

L'unica quota capitale non nulla è l'ultima:

$$C_{12} = 5.000.000$$

avremo perciò

$$V_3 = 5.000.000 \cdot 1,07^{-9} = 2.719.669$$

Le quote interesse sono tutte uguali e valgono:

$$I = 5.000.000 \cdot 0,0415 = 207.500$$

ne deduciamo quindi l'usufrutto:

$$U_2 = I \cdot a_{9\rceil\ 0,07} = 1.351.910,692$$

4 Scelta degli investimenti.

Per poter confrontare due operazioni finanziarie, introdurremo due criteri: il criterio del TIR (**tasso interno di rendimento**) ed il criterio del VAN (**valore attuale netto**, chiamato anche REA).

Ricordiamo che un'operazione finanziaria è rappresentabile come una famiglia di coppie in cui x_h rappresenta il generico importo (positivo o negativo) relativo all'epoca t_h. In simboli, sotto forma di scadenzario:

$$(x_0, x_1, \ldots, x_h, \ldots, x_n)/(t_0, t_1, \ldots, t_h, \ldots, t_n)$$

oppure

$$\{(x_h/t_h)\}_{h=0,\ldots,n}$$

Per un'operazione generica, il VAN è determinato dalla seguente:

$$VAN = \sum_{h=0}^{n} x_h \cdot (1+j)^{-(t_h - t_0)}$$

ossia dobbiamo attualizzare tutti gli importi x_h con un tasso di valutazione arbitrario j.

Esempio.

Consideriamo le due operazioni seguenti:

$$\Theta_1 = (-100; 60; 50; 40)/(0; 1; 2; 3)$$
$$\Theta_2 = (-100; 60; 0; 100)/(0; 1; 2; 3)$$

Abbiamo in entrambi i casi un esborso di 100 all'epoca $zero$. Calcoliamo il VAN scegliendo un tasso di valutazione $j = 10\%$.

$$VAN\,(\Theta_1) = -100 + 60 \cdot (1,10)^{-1} + 50 \cdot (1,10)^{-2} + \\ +40 \cdot (1,10)^{-3} = 25,92$$
$$VAN\,(\Theta_2) = -100 + 60 \cdot (1,10)^{-1} + 0 \cdot (1,10)^{-2} + \\ +100 \cdot (1,10)^{-3} = 29,67$$

Se utilizziamo adesso un tasso di valutazione $j = 22\%$, otteniamo:

$$VAN\,(\Theta_1) = -100 + 60 \cdot (1,22)^{-1} + 50 \cdot (1,22)^{-2} + \\ +40 \cdot (1,22)^{-3} = 4,80$$
$$VAN\,(\Theta_2) = -100 + 60 \cdot (1,22)^{-1} + 0 \cdot (1,22)^{-2} + \\ +100 \cdot (1,22)^{-3} = 4,25.$$

Vediamo quindi che il VAN è un criterio soggettivo, legato alla scelta arbitraria del tasso di valutazione.

Consideriamo ora l'operazione finanziaria determinata dallo scadenzario:

$$\Theta = (-100; 15; 15; 115)/(0; 1; 2; 3)$$

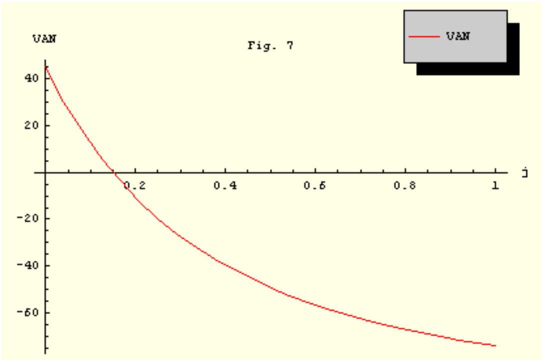
Il VAN calcolato al tasso di valutazione j è dato da:

$$VAN(j) = -100 + \frac{15}{1+j} + \frac{15}{(1+j)^2} + \frac{115}{(1+j)3}$$

che possiamo rappresentare graficamente come funzione di j (vedere figura 7):

Il grafico precedente interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza di $j = 0,15$ (come ci si poteva aspettare dall'analisi dello scadenzario).

Alla luce di questa osservazione, diamo la seguente definizione.



Il **tasso interno di costo** (TIR) è quell'unico tasso (se esiste) che annulla il VAN. Nell'esempio precedente abbiamo perciò $TIR = 15\%$.

Esempio.

Data l'operazione finanziaria caratterizzata dallo scadenzario:

$$(-99,2; 4; 4; 4; 104)/(0; 1; 2; 3; 4)$$

il TIR si ottiene risolvendo l'equazione in j:

$$-99,2 + \frac{4}{1+j} + \frac{4}{(1+j)^2} + \frac{4}{(1+j)^3} + \frac{104}{(1+j)^4} = 0.$$

Risolvendo con il metodo dell'interpolazione, si ottiene $j = 4,22\%$.

Definiamo ora il tempo (o periodo) di recupero (**payback period**) l'epoca dalla quale il totale delle entrate cumulate supera definitivamente il totale delle uscite anch'esse cumulate.

Esempio.

Siano le operazioni finanziarie:

$$\Theta_1 = (-100; 50; 40; 20; 10)/(0; 1; 2; 3; 4) \rightarrow TR_1 = 3$$
$$\Theta_2 = (-100; 50; 40; 20; 1.000)/(0; 1; 2; 3; 4) \rightarrow TR_2 = 3$$

Per poter confrontare attraverso il criterio del VAN due alternative d'investimento, le operazioni finanziarie devono essere omogenee nel senso che devono presentare:

- gli stessi importi in uscita;

- stessa durata.

Esempio.

Consideriamo le due operazioni:

$$A = (-100; 20; 130)/(0; 1; 2)$$
$$B = (-80; 20; 115)/(0; 1; 2)$$

Osserviamo che A e B non presentano lo stesso importo in uscita. Possiamo a questo punto integrare l'operazione B con la seguente operazione B':

$$B' = (-20; 25)/(0; 1)$$

Possiamo perciò confrontare A con l'operazione:

$$B + B' = (-100; 45; 115)/(0; 1; 2).$$

Esempio.

Consideriamo le due operazioni:

$$A = (-100; 20; 130)/(0; 1; 2)$$

$$C = (-100; 20; 20; 120)/(0; 1; 2; 3)$$

Osserviamo che A e C non presentano la stessa durata. Possiamo a questo punto integrare l'operazione A con la seguente operazione A':

$$A' = (0; -20; -20; 50)/(0; 1; 2; 3)$$

Possiamo perciò confrontare C con l'operazione:

$$A + A' = (-100; 0; 110; 50)/(0; 1; 2; 3).$$

Esercizio.

Un'azienda attiva un investimento che richiede oggi un esborso di 10.000 ed assicura dopo un anno una prima rata di 6.000 e dopo due anni un'altra entrata di 6.600. Calcolare il TIR dell'operazione.

Ipotizzando che l'azienda debba prendere a prestito i fondi necessari all'investimento si confrontino le due seguenti alternative di finanziamento individuando la migliore per l'azienda:

- rimborso unico al 16% con pagamento annuo degli interessi e reinvestimento dell'eventuale eccedenza tra entrate ed uscite complessive annue dell'azienda al 13%;

- rimborso graduale mediante l'utilizzo delle entrate dell'investimento.

L'operazione d'investimento presenta lo scadenzario seguente:

$$I = (-10.000; 6.000; 6.600)/(0; 1; 2)$$

Il TIR si ottiene risolvendo l'equazione

$$6.600 \cdot v^2 + 6.000 \cdot v = 10.000$$

dove $v = (1 + i)^{-1}$.Applicando la formula risolutiva si ottiene:

$$v_1 = -1,7667 \rightarrow \text{non accettabile;}$$

$$v_2 = 0,85761 \rightarrow i = 0,1660$$

La prima alternativa a rimborso unico presenta lo scadenzario:

$$A_1 = (10.000; -1.600; -11.600)/(0; 1; 2)$$

il cui saldo netto con l'operazione I presenta i seguenti flussi:

$$(0; 4.400; -5.000)/(0; 1; 2).$$

Reinvestendo, come previsto, le eccedenze al 13%, il saldo finale sarà:

$$4.400 \cdot 1,13 - 5.000 = -28 < 0$$

Relativamente alla seconda operazione, essa prevede l'utilizzo delle entrate per la graduale restituzione del debito.

All'epoca uno quindi, la prima rata pari a 6.000 sarà impiegata per restituire la prima quota interessi pari a 1.600 ed il residuo costituirà la prima quota capitale pari a 4.400.

A questo punto, il debito residuo dell'ammortamento sarà pari a $D_1 = 10.000 - 4.400 = 5.600$ che dovrà essere restituito all'epoca due con la seconda quota interessi ad esso relativo; alla seconda scadenza avremo dunque un esborso pari a:

$$5.600 + 5.600 \cdot 0,16 = 6.496.$$

In questa seconda modalità di restituzione del debito si ottengono, quindi, i flussi seguenti:

$$(10.000; -6.000; -6.496)/(0; 1; 2)$$

che sommata alle entrate dell'investimento I forniscono un valore netto pari a:

$$(0; 0; 104)/(0; 1; 2)$$

La seconda alternativa è perciò più vantaggiosa.

Esercizio.

Un'operazione d'investimento prevede un esborso iniziale di 100.000 nonché un ulteriore costo pari a 30.000 dopo un anno. A fronte di queste due uscite sono previste entrate dal terzo anno pari a 30.000 per quattro anni consecutivi e 20.000 per ulteriori tre anni.

L'impresa che attiva l'investimento deve finanziare metà dell'esborso iniziale mediante un prestito che restituisce in cinque anni versando quote capitale costanti al 10%. Calcolare:

- il TIR della sola operazione d'investimento;

- il TIR dell'operazione complessiva;

- il VAN dell'operazione complessiva usando un tasso di valutazione pari al tasso di remunerazione del prestito.

Lo scadenzario dell'operazione d'investimento è:

$$(-100.000; -30.000; 0; 30.000; 30.000; 30.000; 30.000;$$
$$20.000; 20.000; 20.000)/(0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9)$$

Il TIR si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio finanziario (dove abbiamo diviso per 1.000 tutti gli importi):

$$-100 - 30 \cdot (1+i)^{-1} + 30 \cdot (1+i)^{-2} \cdot a_{4\rceil\, i} + 20 \cdot (1+i)^{-6} \cdot a_{3\rceil\, i} = 0$$

Risolviamo per interpolazione prendendo come soglie il 5% ed il 10%. Si ha:

$$i_0 = 0,10 \rightarrow A_0 = -20.605,8$$
$$i_1 = 0,05 \rightarrow A_1 = 8.559,61$$

perciò:

$$i \simeq 0,10 + \frac{-0,05}{29.165,4} \cdot (20.605,8) = 0,064674$$

La metà dell'esborso iniziale è rimborsata mediante un ammortamento italiano le cui quote capitale costanti valgono $C = \frac{50.000}{5} = 10.000$. La successione delle rate sarà quindi (dividiamo tutti gli importi per 1.000): $(15; 14; 13; 12; 11)/(1; 2; 3; 4; 5)$.

Otteniamo perciò lo scadenzario dell'operazione complessiva:

$$(-50; -45; -14; 17; 18; 19; 30; 20; 20; 20)/(0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9)$$

Determiniamo adesso il TIR dell'operazione complessiva risolvendo l'equazione:

$$V(i) = -50 - \frac{45}{1+i} - \frac{14}{(1+i)^2} + \frac{17}{(1+i)^3} + \frac{18}{(1+i)^4} + \frac{19}{(1+i)^5} + \frac{30}{(1+i)^6}$$
$$+ \frac{20}{(1+i)^7} + \frac{20}{(1+i)^8} + \frac{20}{(1+i)^9} = 0$$

Risolviamo per interpolazione prendendo come soglie il 5% ed il $7,5\%$. Si ha:

$$i_0 = 0,05 \rightarrow A_0 = 1,8544$$
$$i_1 = 0,075 \rightarrow A_1 = -10,4381$$

perciò:

$$i \simeq 0,05 + \frac{0,025}{-10,4381 - 1,8544} \cdot (-1,8544) = 0,05377$$

Infine, il calcolo del VAN è:

$$V(0, 10) = -20,6058$$

Si ottiene un risultato negativo perché abbiamo utilizzato un tasso di valutazione maggiore del TIR.

Esercizio.

Due progetti finanziari della durata di due anni danno luogo ai seguenti flussi:

- progetto *A:* entrata iniziale pari a 1.000; spesa dopo un anno pari a 2.000; entrata dopo due anni pari a 2.000;

- progetto *B*: spesa iniziale pari a 4.000; entrata dopo un anno pari a 7.000; spesa dopo due anni pari a 1.500.

Si indichi:

- per ciascun progetto quale tasso (se esiste) uguaglia il VAN delle entrate e delle uscite;

- per un operatore il quale investe immediatamente le entrate al tasso effettivo annuo del 20% e prende a prestito l'importo necessario a coprire le spese sempre al tasso del 20% quale dei due progetti è più redditizio.

Per quanto riguarda il primo progetto, l'equazione

$$2.000 \cdot v^2 - 2.000 \cdot v + 1.000 = 0$$

non ammette soluzioni reali, perciò non esiste il TIR.

Per quanto riguarda il secondo progetto, l'equazione

$$-1.500 \cdot v^2 + 7.000 \cdot v - 4.000 = 0$$

ammette la soluzione accettabile $v = 2/3$ (l'altra soluzione $v = 4$ non è finanziariamente accettabile). Da questa deduciamo

$$i = \frac{1}{v} - 1 = 0, 5.$$

Nel momento in cui si ipotizza la presenza di un tasso di reinvestimento del 20% e di finanziamento ancora pari al 20%, la scelta tra i due progetti potrà essere impostata confrontando i valori residui al termine dei due anni di durata delle due operazioni.

Per il primo progetto si avrà:

$$1.000 \cdot (1, 20)^2 - 2.000 \cdot 1, 20 + 2.000 = 1.040$$

Per il secondo progetto si avrà:

$$-4.000 \cdot (1, 20)^2 + 7.000 \cdot 1, 20 - 1.500 = 1.140$$

Esercizio.

Un'azienda ha a disposizione un capitale di 100.000 che può impegnare per cinque anni scegliendo tra i seguenti investimenti:

a) consiste nell'erogazione di un prestito che verrà rimborsato tra cinque anni in un unica soluzione e che nel frattempo frutterà interessi al 10% annuo.

b) consiste nell'associazione in partecipazione in un'operazione che frutterà 8.000 tra tre anni e 55.000 tra cinque anni.

Scegliere tra le due alternative analizzando il TIR e il VAN delle operazioni con $j = 9\%$.

Lo scadenzario delle due operazioni è (dividiamo gli importi per 1.000):

$$\Theta_a = (-100; 10; 10; 10; 10; 110)/(0; 1; 2; 3; 4; 5)$$
$$\Theta_b = (-100; 0; 0; 80; 0; 55)/(0; 1; 2; 3; 4; 5)$$

Il TIR della prima operazione è chiaramente del 10%, mentre per la seconda dobbiamo risolvere l'equazione:

$$80.000 \cdot (1+i)^{-3} + 55.000 \cdot (1+i)^{-5} = 100.000.$$

Risolviamo per interpolazione prendendo come soglie l' 8% ed il 9%:

$$i_0 = 0,08 \to A_0 = 100.938,6551$$
$$i_1 = 0,09 \to A_1 = 97.521$$

Applichiamo quindi la formula dell'interpolazione:

$$i \simeq 0,08 + \frac{0,09-0,08}{97.521-100.938,6551} \cdot (100.000 - 100.938,6551) = 0,0827$$

Perciò in base al criterio del TIR è più conveniente l'operazione *a)*.

Calcoliamo ora il VAN al tasso di valutazione j:

$$VAN_a = -100.000 + 10.000 \cdot a_{5\rceil\,0,09} + 100.000 \cdot (1,09)^{-5} = 3.889$$
$$VAN_b = -100.000 + 80.000 \cdot (1,09)^{-3} + 55.000 \cdot (1,09)^{-5} = -2,479$$

Concludiamo nuovamente che è più conveniente l'operazione *a)*.

Esercizio.

Un'azienda ha il problema di scegliere tra due alternative d'investimento cosi strutturate:

a) pagamento immediato anticipato di 140, incasso tra due anni di 200;

b) pagamento immediato di 210, incasso tra tre anni di 460.

Il capitale proprio disponibile è pari a 140, mentre il costo di credito è il 20% annuo.

Il tasso di remunerazione dei flussi è pari al 15% annuo.

Valutare le opportunità secondo il criterio del VAN sapendo che il tasso di riferimento dell'azienda è il $10,50\%$ annuo.

La prima alternativa ha una durata di due anni. Per renderla omogenea con la seconda (che ha durata tre anni) capitalizziamo l'importo dell'epoca due di un anno:

$$\text{all'epoca } 3 \to 200 \cdot (1 + 0,15) = 230.$$

Abbiamo perciò:

$$VAN_a = -140 + 203 \cdot (1 + 0,105)^{-3} = 10,456$$

Per quanto riguarda la seconda alternativa, abbiamo un esborso immediato di 210, perciò dovremo prendere a prestito un importo di 70 (avendo già a disposizione un importo di 140), perciò il saldo netto all'epoca tre sarà:

$+460 - 70 \cdot (1 + 0,20)^3 = 339,04.$

Calcoliamo infine il VAN:

$$VAN_b = -140 + 339,04 \cdot (1 + 0,105)^{-3} = 111,284.$$

Possiamo perciò concludere che la seconda alternativa è preferibile, essendo $VAN_b > VAN_a$.

Esercizio.

Calcolare il TIR di un investimento che si ottiene comprando 1.000 titoli descritti dal seguente scadenzario:

$$(-97; 5; 5; 5; 5; 105)/(0; 1; 2; 3; 4; 5)$$

nel caso in cui metà del capitale necessario per l'acquisto sia frutto di un prestito che viene rimborsato in cinque anni a rimborso unico al tasso del 4% annuo.

L'ammontare del prestito sarà $48,5$ (dividiamo tutti gli importi per 1.000) con quote interessi pari a $48,5 \cdot i = 1,94$. Lo scadenzario del prestito sarà:

$$(48,5; -1,94; -1,94; -1,94; -1,94; -50,44)/(0; 1; 2; 3; 4; 5)$$

I flussi netti delle due operazioni saranno perciò:

$$(-48,5; 3,06; 3,06; 3,06; 3,06; 54,56)/(0; 1; 2; 3; 4; 5)$$

Infine il TIR si ottiene risolvendo la seguente equazione di equilibrio finanziario:

$$48,5 = 3,06 \cdot (1+j)^{-1} + 3,06 \cdot (1+j)^{-2} + 3,06 \cdot (1+j)^{-3} + \\ +3,06 \cdot (1+j)^{-4} + 54,56 \cdot (1+j)^{-5}$$

Procediamo per interpolazione e prendiamo come soglie il 7% ed il 9%. Abbiamo:

$$i_0 = 0,07 \rightarrow A_0 = 49,2654$$
$$i_1 = 0,09 \rightarrow A_1 = 45,3738$$

perciò:

$$i \simeq 0,07 + \frac{0,02}{-3,8916} \cdot (-0,7654) = 0,0739.$$

5 Struttura a termine dei tassi d'interesse.

Premessa. Consideriamo le seguenti ipotesi generali vigenti sui mercati:

- assenza di costi di transazione ed imposte;
- infinita divisibilità dei titoli;
- possibilità di detenzione negative di titoli in portafoglio;
- perfetta concorrenza (gli operatori non influiscono sui prezzi);
- assenza di arbitraggi;
- massimizzazione del profitto.

5.1 Operazioni a pronti e a termine.

Si definisce **operazione a pronti** un'operazione consistente nello scambio di un importo x_0 in t_0 con un altro importo x_n in t_n. Sotto forma di scadenzario:

$$(x_0; x_n)/(t_0; t_n).$$

Si definisce **operazione a termine** un'operazione conclusa in t_0 consistente nello scambio di un importo x_k in t_k con un altro importo x_n in t_n. Sotto forma di scadenzario:

$$(0; x_k; x_n)/(t_0; t_k; t_n).$$

In questo caso abbiamo all'epoca $zero$ un accordo tra le parti, ma non è un'operazione differita.

Consideriamo nuovamente un'operazione a pronti. Per ogni scadenza t_n possiamo introdurre un **fattore di montante a pronti** definito nel modo seguente:

$$m\,(t_0; t_n) = \frac{x_n}{x_0} > 1$$

Nell'ambito del $RFIC$, possiamo associare all'operazione a pronti un tasso d'interesse a **pronti** (o tasso **spot**) legato al fattore di montante dalla relazione:

$$m\,(t_0; t_n) = [1 + i\,(t_0; t_n)]^{t_n - t_0}$$

Il tasso a pronti è un tasso in base al quale posso investire le mie disponibilità dall'epoca t_0 all'epoca t_n (ossia rappresenta l'interesse prodotto investendo un capitale unitario in un'operazione a pronti dall'epoca t_0 all'epoca t_n).

Il **fattore di sconto a pronti** è ovviamente definito come il reciproco del fattore di montante, ossia:

$$v\,(t_0; t_n) = \frac{1}{m(t_0; t_n)} = \frac{x_0}{x_n} = [1 + i\,(t_0; t_n)]^{-(t_n - t_0)}$$

Avremo ovviamente $0 < v\,(t_0; t_n) < 1$.

Possiamo perciò determinare il tasso a pronti dal fattore di montante o dal fattore di sconto nel modo seguente:

$$i\,(t_0; t_n) = m\,(t_0; t_n)^{1/(t_n - t_0)} - 1 = v\,(t_0; t_n)^{-1/(t_n - t_0)} - 1$$

Esempio.

Sia disponibile sul mercato uno *zero coupon bond* (ossia un titolo senza cedole) che paga 121 euro tra due anni e costa oggi 100 euro.

Si tratta di un'operazione a pronti con $x_0 = 100$ e $x_2 = 121$. Possiamo perciò ricavare:

$$m(0;2) = \frac{121}{100} = 1,21$$
$$i(0;2) = 1,21^{1/2} - 1 = 0,10$$

Consideriamo ora l'operazione a termine $(0; x_k; x_n)/(t_0; t_k; t_n)$. Possiamo introdurre il **fattore di montante a termine** definito nel modo seguente:

$$m\left(t_0; t_k; t_n\right) = \frac{x_n}{x_k} > 1$$

Nell'ambito del $RFIC$, possiamo associare all'operazione a termine un tasso d'interesse a **termine** (o tasso **forward**) legato al fattore di montante dalla relazione:

$$m\left(t_0; t_k; t_n\right) = \left[1 + i\left(t_0; t_k; t_n\right)\right]^{t_n - t_k}$$

Il tasso a termine è un tasso, contestualmente stabilito in t_0, in base al quale posso investire le mie disponibilità dall'epoca t_k all'epoca t_n (ossia rappresenta l'interesse prodotto investendo un capitale unitario in un'operazione a termine dall'epoca t_k all'epoca t_n).

Il **fattore di sconto a termine** è ovviamente definito come il reciproco del fattore di montante, ossia:

$$v\left(t_0; t_k; t_n\right) = \frac{1}{m(t_0; t_k; t_n)} = \frac{x_k}{x_n} = \left[1 + i\left(t_0; t_k; t_n\right)\right]^{-(t_n - t_k)}$$

Avremo ovviamente $0 < v\left(t_0; t_k; t_n\right) < 1$.

Possiamo perciò determinare il tasso a termine dal fattore di montante o dal fattore di sconto nel modo seguente:

$$i\left(t_0; t_k; t_n\right) = m\left(t_0; t_k; t_n\right)^{1/(t_n - t_k)} - 1 = v\left(t_0; t_k; t_n\right)^{-1/(t_n - t_k)} - 1$$

5.2 La scindibilità.

In un mercato come quello di cui abbiamo visto le caratteristiche, la relazione tra i montanti sarà

$$m\left(t_0; t_n\right) = m\left(t_0; t_k\right) \cdot m\left(t_0; t_k; t_n\right)$$

per ogni epoca intermedia k (contropartita della scindibilità nel mercato).

Una relazione analoga vale per i valori attuali:

$$v\left(t_0; t_n\right) = v\left(t_0; t_k\right) \cdot v\left(t_0; t_k; t_n\right)$$

Queste relazioni prendono il nome di relazione di **coerenza** o di **non arbitraggio** e consentono di stabilire un legame tra i tassi spot ed i tassi forward. Ad esempio, dalla relazione

$$i(0;t) = \left[m(0;t)\right]^{1/t} - 1 = \left(\frac{1}{v(0;t)}\right)^{1/t} - 1$$

e dalla relazione di coerenza

$$m(0;t) = m(0;t-1) \cdot m(0;t-1;t)$$

possiamo dedurre la seguente:

$$i(0;t-1;t) = \frac{m(0;t)}{m(0;t-1)} - 1 = \frac{[1+i(0;t)]^t}{[1+i(0;t-1)]^{t-1}} - 1$$

Esempio.

Dati tre *zero coupon bond* che assicurano rispettivamente 110; $123,2$ e $139,216$ dopo un anno, due anni e tre anni, calcolare i corrispondenti tassi spot e forward sapendo che i tre prezzi all'epoca $zero$ sono pari a 100.

Ricordiamo le relazioni generali appena viste:

$$m(0;t) = [1+i(0;t)]^t = \frac{x_t}{x_0}$$
$$v(0;t) = [1+i(0;t)]^{-t} = \frac{x_0}{x_t}$$
$$i(0;t) = [m(0;t)]^{1/t} - 1 = [v(0;t)]^{-1/t} - 1$$
$$m(0;t) = m(0;t-1) \cdot m(0;t-1;t) \rightarrow m(0;t-1;t) = \frac{m(0;t)}{m(0;t-1)}$$
$$i(0;t-1;t) = \frac{m(0;t)}{m(0;t-1)} - 1$$

Avremo nel nostro caso:

$$m(0;1) = \frac{x_1}{x_0} = 1,10$$
$$m(0;2) = \frac{x_2}{x_0} = 1,232$$
$$m(0;3) = \frac{x_3}{x_0} = 1,39216$$
$$i(0;1) = \left(\frac{110}{100}\right)^1 - 1 = 0,10$$
$$i(0;2) = \left(\frac{123{,}2}{100}\right)^{1/2} - 1 = 0,10995$$
$$i(0;3) = \left(\frac{139{,}216}{100}\right)^{1/3} - 1 = 0,1166$$

Per quanto riguarda i tassi forward avremo:

$$i(0;1;2) = \frac{m(0;2)}{m(0;1)} - 1 = \frac{1{,}232}{1{,}10} - 1 = 0,12$$
$$i(0;2;3) = \frac{m(0;3)}{m(0;2)} - 1 = \frac{1{,}39216}{1{,}232} - 1 = 0,13$$

Introduciamo ora i tassi istantanei.

L'**intensità di interesse a pronti** è definita come

$$h(0;t) = \log[1+i(0;t)] \rightarrow i(0;t) = e^{h(0;t)} - 1$$

perciò

$$m(0,t) = [1+i(0;t)]^t = e^{h(0;t) \cdot t}$$

mentre l'**intensità di interesse a termine** è definita come

$$h(0;t-1;t) = \log[1+i(0;t-1;t)]$$

Nel caso dell'esempio precedente avremo:

$$h(0;1) = \log 1,10 = 0,095$$
$$h(0;2;3) = \log 1,13 = 0,122$$

5.3 La durata media finanziaria.

La **durata media finanziaria** (o "duration") di un titolo rappresenta la media ponderata delle scadenze, usando come pesi il valore attuale degli importi. Il risultato sarà pertanto un numero che possiede le dimensioni di un tempo. Vedremo in seguito che la *duration* del primo ordine rappresenta un indicatore di sensibilità del valore di un titolo a cambiamenti nella struttura dei tassi.

Sia lo scadenzario $(x_1, \dots, x_n)/(t_1, \dots, t_n)$ e supponiamo di conoscere per ogni scadenza il fattore di attualizzazione a pronti $v(0;t_h)$. La durata media finanziaria del primo ordine è definita nel modo seguente:

$$\widehat{D} = \frac{\sum_{h=1}^{n} t_h \cdot x_h \cdot v(0,t_h)}{\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot v(0,t_h)} = \frac{\sum_{h=1}^{n} t_h \cdot x_h \cdot [1+i(0;t_h)]^{-t_h}}{\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot [1+i(0;t_h)]^{-t_h}}$$

Si ha ovviamente $0 \leq \widehat{D} \leq t_n$.

Esempio.

Sia lo scadenzario $(16; 15; 14)/(1; 2; 3)$ e supponiamo di conoscere i tassi spot $i(0; 1) = 16\%$; $i(0; 2) = 15\%$ e $i(0; 3) = 14\%$. Avremo

$$\widehat{D} = \frac{1 \cdot 16 \cdot 1{,}16^{-1} + 2 \cdot 15 \cdot 1{,}15^{-2} + 3 \cdot 14 \cdot 1{,}14^{-3}}{16 \cdot 1{,}16^{-1} + 15 \cdot 1{,}15^{-2} + 14 \cdot 1{,}14^{-3}} = 1,8744$$

Se la struttura dei tassi è data attraverso il tasso istantaneo δ la definizione di *duration* diventa:

$$\widehat{D} = \frac{\sum_{h=1}^{n} t_h \cdot x_h \cdot e^{-\delta \cdot t_h}}{\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot e^{-\delta \cdot t_h}}$$

oppure nel caso particolare di un tasso costante i avremo:

$$\widehat{D} = \frac{\sum_{h=1}^{n} t_h \cdot x_h \cdot (1+i)^{-t_h}}{\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot (1+i)^{-t_h}}$$

Vediamo adesso un significato finanziario della *duration*. Sia un titolo avente lo scadenzario seguente: $(x_1, \ldots, x_n)/(t_1, \ldots, t_n)$.

Il valore attuale del titolo in $zero$ calcolato al tasso costante i può essere considerato come funzione di i:

$$V(0; i) = \sum_{h=1}^{n} x_h \cdot (1+i)^{-t_h}$$

Calcoliamo la derivata di questa funzione rispetto ad i:

$$V'(0; i) = \sum_{h=1}^{n} \left(-x_h \cdot t_h \cdot (1+i)^{-t_h - 1}\right) = \sum_{h=1}^{n} \left(-x_h \cdot t_h \cdot \frac{(1+i)^{-t_h}}{1+i}\right) =$$

$$= -\frac{1}{1+i} \cdot \sum_{h=1}^{n} \left(x_h \cdot t_h \cdot (1+i)^{-t_h}\right) = -\frac{\widehat{D}}{1+i} \cdot V(0, i)$$

Da questa formula discende un importante significato finanziario: la variazione di valore di un titolo a seguito di un cambiamento del tasso è direttamente proporzionale alla duration. Un titolo con duration elevata subirà una variazione di valore elevata per effetto di una variazione dei tassi (quindi lo definiremo più "rischioso" rispetto ad un titolo con bassa duration). Diremo anche che un titolo con duration elevata è più volatile. Il segno meno nella formula infine comporta che un aumento del tasso provoca una diminuzione di valore del titolo (e viceversa).

L'ultima formula può essere modificata sostituendo alla derivata il suo rapporto incrementale (l'uguaglianza diventa allora un'approssimazione), ossia:

$$\frac{\Delta V}{\Delta i} \approx -\frac{\widehat{D}}{1+i} \cdot V \Longrightarrow \Delta V \approx -\frac{\widehat{D}}{1+i} \cdot V \cdot \Delta i$$

Esempio.

Supponiamo che un titolo abbia valore 100 e duration pari a 3. Quale sarà il cambiamento di valore del titolo se il tasso, dal 10% subisce un incremento di un punto?

Avremo

$$\Delta V = -\frac{3}{1+0{,}10} \cdot 100 \cdot (+0,01) = -2,727$$

perciò il valore del titolo diminuisce.

Supponiamo che il regime finanziario sia determinato dalla conoscenza del tasso istantaneo δ. Il valore del titolo sarà:

$$V(0;\delta)=\sum_{h=1}^{n} x_h\cdot e^{-\delta\cdot t_h}$$

Calcoliamone la derivata rispetto a δ:

$$V'(0;\delta)=-\sum_{h=1}^{n} t_h\cdot x_h\cdot e^{-\delta\cdot t_h}=-\widehat{D}\cdot V(0;\delta)$$

perciò la versione discretizzata è:

$$\Delta V=-\widehat{D}\cdot V\cdot\Delta\delta$$

Esempio.

Sia un titolo il cui scadenzario è: $(10;10;110)/(1;2;3)$. Calcolare la *duration* sapendo che $i(0;t)=i=0,11$.

Il valore attuale del titolo è:

$$V(0;0,11)=\frac{10}{1{,}11}+\frac{10}{1{,}11^2}+\frac{110}{1{,}11^3}=97,56$$

mentre la *duration* vale:

$$\widehat{D}=\frac{1\cdot\frac{10}{1{,}11}+2\cdot\frac{10}{1{,}11^2}+3\cdot\frac{110}{1{,}11^3}}{97{,}56}=2,732.$$

Osservazione.

Ricordiamo che se il tasso aumenta, il valore di mercato del titolo scende mentre se il tasso diminuisce l'effetto prezzo è positivo. Supponiamo che un individuo con l'obbligazione dell'esempio precedente vuole incassare gli importi dell'operazione in una data che coincide con la *duration.*

Calcolo della disponibilità finanziaria:

$$V(\widehat{D};0,11)=10\cdot(1,11)^{2{,}732-1}+10\cdot(1,11)^{2{,}732-2}+110\cdot(1,11)^{-(3-2{,}732)}=129,7411$$

(i primi due termini rappresentano il reinvestimento delle cedole).

Supponiamo che all'epoca $t=0^+$ (un istante dopo l'epoca $zero$) il tasso cambia e passa al 12%. Il valore del titolo diminuisce (effetto prezzo) mentre il reinvestimento delle cedole produce un effetto opposto.

Quale sarà l'effetto complessivo? Avremo:

$$V(\widehat{D};0,12)=10\cdot(1,12)^{2{,}732-1}+10\cdot(1,12)^{2{,}732-2}+110\cdot(1,12)^{-(3-2{,}732)}=129,7411$$

perciò il valore non cambia. Se il tasso diminuisce, ad esempio $i=10\%$, l'effetto prezzo e l'effetto reinvestimento hanno una variazione opposta rispetto al caso precedente però l'effetto complessivo non cambia. Avremo sempre $V(\widehat{D};0,10)=129,7411$.

Si può anzi dimostrare che l'unica epoca in corrispondenza della quale non cambia la disponibilità finanziaria offerta dal titolo è proprio la *duration*. In altre parole, in corrispondenza della *duration*, effetto prezzo ed effetto reinvestimento delle cedole si compensano perfettamente (sia nel caso di aumento che di diminuzione dei tassi). Abbiamo quindi ottenuto un altro significato finanziario del concetto di duration.

Osservazione.

Si può dimostrare che per un titolo con cedole ("**coupon bond**") la duration è una funzione decrescente del tasso (ipotizzando un tasso costante). Per un titolo senza cedole la *duration* è ovviamente uguale alla vita residua del titolo.

La definizione di *duration* può essere generalizzata. Si perviene così al concetto di *duration* del secondo ordine definita come la media ponderata del quadrato delle scadenze usando nuovamente come pesi gli importi attualizzati. In simboli avremo:

$$\widehat{D}^{(2)} = \frac{\sum_{h=1}^{n} t_h^2 \cdot x_h \cdot v(0,t_h)}{\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot v(0,t_h)} = \frac{\sum_{h=1}^{n} t_h^2 \cdot x_h \cdot [1+i(0;t_h)]^{-t_h}}{\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot [1+i(0;t_h)]^{-t_h}}$$

Se la struttura dei tassi è data attraverso il tasso istantaneo δ la definizione di *duration* del secondo ordine diventa:

$$\widehat{D} = \frac{\sum_{h=1}^{n} t_h^2 \cdot x_h \cdot e^{-\delta \cdot t_h}}{\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot e^{-\delta \cdot t_h}}$$

oppure nel caso particolare di un tasso costante i avremo:

$$\widehat{D} = \frac{\sum_{h=1}^{n} t_h^2 \cdot x_h \cdot (1+i)^{-t_h}}{\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot (1+i)^{-t_h}}$$

Esempio.

Calcolare la duration del secondo ordine (dispersione) del seguente titolo:

$$b_1 = (-89; 5; 5; 105)/(0; 1; 2; 3)$$

se $v(0; 1) = 0,95$; $v(0; 2) = 0,90$; $v(0; 3) = 0,85$.

Applichiamo la definizione:

$$\widehat{D}^{(2)} = \frac{1 \cdot 5 \cdot v(0;1) + 4 \cdot 5 \cdot v(0;2) + 9 \cdot 105 \cdot v(0;3)}{5 \cdot v(0;1) + 5 \cdot v(0;2) + 105 \cdot v(0;3)} = \frac{826}{98,5} = 8,3858$$

Esempio.

Supponiamo che la struttura dei tassi sia data dall'equazione:

$$i(0; t) = 0,06 - 0,005 \cdot (t - 1).$$

Determinare il valore di mercato, la *duration* del primo e secondo ordine ed il TIR del titolo avente lo scadenzario seguente:

$$\Theta = (2,5; 2,5; 2,5; 102,5)/(1/2; 1; 3/2; 2)$$

dove i tempi sono espressi in anni.

Determiniamo i tassi a pronti:

$$i(0; 1/2) = 0,06 - 0,005 \cdot (1/2 - 1) = 0,0625$$
$$i(0; 1) = 0,06 - 0,005 \cdot (1 - 1) = 0,06$$
$$i(0; 3/2) = 0,06 - 0,005 \cdot (3/2 - 1) = 0,0575$$
$$i(0; 2) = 0,06 - 0,005 \cdot (2 - 1) = 0,055$$

Il valore del titolo sarà perciò:

$$V(0; \Theta) = \frac{2,5}{(1,0625)^{1/2}} + \frac{2,5}{(1,06)^1} + \frac{2,5}{(1,0575)^{3/2}} + \frac{102,5}{(1,055)^2} = 99,17$$

Calcoliamo infine le *duration* partendo dalla definizione:

$$\widehat{D} = \frac{1}{99,17} \cdot \left(\frac{0,5 \cdot 2,5}{(1,0625)^{1/2}} + \frac{1 \cdot 2,5}{(1,06)^1} + \frac{1,5 \cdot 2,5}{(1,0575)^{3/2}} + \frac{2 \cdot 102,5}{(1,055)^2} \right) = \frac{191,20}{99,17} = 1,93$$

$$\widehat{D}^2 = \frac{1}{99,17} \cdot \left(\frac{0,5^2 \cdot 2,5}{(1,0625)^{1/2}} + \frac{1^2 \cdot 2,5}{(1,06)^1} + \frac{1,5^2 \cdot 2,5}{(1,0575)^{3/2}} + \frac{2^2 \cdot 102,5}{(1,055)^2} \right) = \frac{376,6}{99,17} = 3,80$$

Infine, per quanto riguarda il TIR, dobbiamo risolvere l'equazione di equilibrio:

$$\frac{2,5}{(1+i)^{1/2}} + \frac{2,5}{(1+i)^1} + \frac{2,5}{(1+i)^{3/2}} + \frac{102,5}{(1+i)^2} = 99,17$$

la quale risolta per interpolazione fornisce $i = 6,15\%$.

Esercizio.

Calcolare il prezzo e la *duration* di primo e secondo ordine del seguente titolo:

$$b_1 = (P; 6; 6; 106)/(0; 1; 2; 3)$$

se $v(0; 1) = 0,95$; $v(0; 2) = 0,90$ e $v(0; 3) = 0,85$.

Il prezzo è:

$$P = 6 \cdot 0,95 + 6 \cdot 0,90 + 106 \cdot 0,85 = 101,2$$

Applichiamo la definizione di *duration*:

$$\widehat{D} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 0,95 + 2 \cdot 6 \cdot 0,90 + 3 \cdot 106 \cdot 0,85}{101,2} = 2,833$$

$$\widehat{D}^2 = \frac{1 \cdot 6 \cdot 0,95 + 4 \cdot 6 \cdot 0,90 + 9 \cdot 106 \cdot 0,85}{101,2} = 8,2826$$

5.4 L'arbitraggio.

Ricordiamo che la relazione di coerenza impone che si abbia

$$v(t_0; t_n) = v(t_0; t_h) \cdot v(t_0; t_h; t_n)$$
$$m(t_0; t_n) = m(t_0; t_h) \cdot m(t_0; t_h; t_n).$$

Se l'uguaglianza non fosse vera, gli operatori comprerebbero l'operazione che rende di più e venderebbero quella che rende di meno con l'obiettivo di realizzare un profitto immediato privo di rischio.(ricordiamo che sul mercato tutti gli operatori sono razionali).

Supponiamo che si abbia la situazione seguente:

$$m(t_0; t_n) > m(t_0; t_h) \cdot m(t_0; t_h; t_n)$$

Vediamo un esempio numerico.

Esempio.

Sono disponibili sul mercato le seguenti tre operazioni:

$$z_1 : \quad (-95; 100)/(0; 1)$$
$$z_2 : \quad (-85; 100)/(0; 3)$$
$$z_3 : \quad (-90,25; 100)/(1; 3)$$

Verificare se le tre operazioni rispettino o meno la proprietà di non arbitraggio. Nel caso in cui non la rispettino, costruire un adeguato mix di operazioni che consentano di realizzare un profitto all'epoca $zero$ annullando qualsiasi altro importo sul resto dello scadenzario.

Affinché ci sia possibilità di arbitraggio deve risultare:

$$v(0; 3) \neq v(0; 1) \cdot v(0; 1; 3)$$

Dai tre titoli possiamo ricavare i fattori di sconto:

$$z_1 \to v(0; 1) = \frac{95}{100} = 0,95$$
$$z_2 \to v(0; 3) = \frac{85}{100} = 0,85$$
$$z_3 \to v(0; 1; 3) = \frac{90,25}{100} = 0,9025$$

Ricordiamo che $v(0; 1; 3)$ rappresenta il valore all'epoca uno di un importo unitario scadente all'epoca tre, in base ad accordi stabiliti all'epoca zero.

Abbiamo

$$v(0;1) \cdot v(0;1;3) = 0,857375 \neq v(0;3)$$
$$v(0;1) \cdot v(0;1;3) > v(0;3)$$

La relazione di non arbitraggio è dunque violata. Si apre perciò una possibilità di arbitraggio: acquisto l'operazione che costa meno e vendo quella che costa di più.

Nello specifico, compro l'operazione z_2, vendo l'operazione z_3 ed infine vendo $0,9025$ unità dell'operazione z_1. Possiamo rappresentare il saldo di queste operazioni nella tabella seguente:

op. fin.	0	1	3
compro una unità di z_2	-85	$-$	$+100$
vendo una unità di z_3	$-$	$+90,25$	-100
vendo $0,9025$ unità di z_1	$+0,9025 \cdot 95$	$-0,9025 \cdot 100$	$-$
saldo	$+0,7375$	0	0

Esempio.

Sapendo che sul nostro mercato finanziario di riferimento $v(0;1) = 0,96$ e $v(0;1;3) = 0,85$, verificare se la presenza di uno *zero coupon bond* unitario $z_1 = (-0,828;1)/(0;3)$ apre la possibilità di arbitraggio e, eventualmente, calcolare il profitto realizzabile impostando una strategia con saldo positivo all'epoca zero.

Affinché ci sia possibilità di arbitraggio deve risultare:

$$v(0;1) \cdot v(0;1;3) \neq v(0;3)$$
$$0,96 \cdot 0,85 = 0,816 < 0,828$$

La relazione di non arbitraggio è dunque violata. Si apre perciò una possibilità di arbitraggio: acquisto l'operazione che costa meno e vendo quella che costa di più.

Nello specifico, vendo l'operazione a pronti $v(0;3)$, compro l'operazione a termine $v(0;1;3)$ ed infine compro $0,85$ unità dell'operazione a pronti $v(0;1)$. Possiamo rappresentare il saldo di queste operazioni nella tabella seguente:

op. fin.	0	1	3
vendo una unità di $v(0;3)$	$+0,828$	$-$	-1
compro una unità di $v(0;1;3)$	$-$	$-0,85$	$+1$
compro $0,85$ unità di $v(0;1)$	$-0,85 \cdot 0,96$	$+0,85 \cdot 1$	$-$
saldo	$+0,012$	0	0

Esempio.

Sapendo che sul nostro mercato finanziario di riferimento $v(0;1) = 0,70$ e $v(0;1;3) = 0,75$, verificare se la presenza di uno *zero coupon bond* unitario $z_1 = (-0,565;1)/(0;3)$ apre la possibilità di arbitraggio e, eventualmente, calcolare il profitto realizzabile impostando una strategia con saldo positivo all'epoca zero.

Affinché ci sia possibilità di arbitraggio deve risultare:

$$v(0;1) \cdot v(0;1;3) \neq v(0;3)$$
$$0,70 \cdot 0,75 = 0,525 < 0,565$$

La relazione di non arbitraggio è dunque violata. Si apre perciò una possibilità di arbitraggio: acquisto l'operazione che costa meno e vendo quella che costa di più.

Nello specifico, vendo l'operazione a pronti $v(0;3)$, compro l'operazione a termine $v(0;1;3)$ ed infine compro $0,75$ unità dell'operazione a pronti $v(0;1)$. Possiamo rappresentare il saldo di queste operazioni nella tabella seguente:

op. fin.	0	1	3
vendo una unità di $v(0;3)$	$+0,565$	$-$	-1
compro una unità di $v(0;1;3)$	$-$	$-0,75$	$+1$
compro $0,75$ unità di $v(0;1)$	$-0,75 \cdot 0,70$	$+0,75 \cdot 1$	$-$
saldo	$+0,04$	0	0

Esempio.

Sapendo che sul nostro mercato finanziario di riferimento $v(0;1) = 0,72$ e $v(0;1;2) = 0,85$, verificare se la presenza di uno *zero coupon bond* unitario $z_1 = (-0,592;1)/(0;2)$ apre la possibilità di arbitraggio e, eventualmente, calcolare il profitto realizzabile impostando una strategia con saldo positivo all'epoca zero.

Affinché ci sia possibilità di arbitraggio deve risultare:

$$v(0;1) \cdot v(0;1;2) \neq v(0;2)$$

$$0,72 \cdot 0,85 = 0,612 > 0,592$$

La relazione di non arbitraggio è dunque violata. Si apre perciò una possibilità di arbitraggio: acquisto l'operazione che costa meno e vendo quella che costa di più.

Nello specifico, compro l'operazione a pronti $v(0;2)$, vendo l'operazione a termine $v(0;1;2)$ ed infine vendo $0,85$ unità dell'operazione a pronti $v(0;1)$. Possiamo rappresentare il saldo di queste operazioni nella tabella seguente:

op. fin.	0	1	3
compro una unità di $v(0;2)$	$-0,592$	$-$	$+1$
vendo una unità di $v(0;1;2)$	$-$	$+0,85$	-1
vendo $0,85$ unità di $v(0;1)$	$+0,85 \cdot 0,72$	$-0,85 \cdot 1$	$-$
saldo	$+0,02$	0	0

Esercizi di riepilogo.

1) Dati i seguenti titoli obbligazionari:

$$b_1 = (-90;95)/(0;1)$$

$$b_2 = (-100;5;105)/(0;1;2)$$

$$b_3 = (-99;5,5;5,5;105,5)/(0;1;2;3)$$

- desumere la struttura dei tassi a pronti;

- scrivere lo scadenzario corrispondente ad un portafoglio composto di due titoli b_1 e tre titoli b_2;

- calcolare il TIR di un portafoglio composto da due titoli b_1 e tre titoli b_2 (procedere per interpolazione).

Dal primo titolo abbiamo:

$$v(0;1) = \frac{90}{95} = 0,94737$$

Dal secondo titolo abbiamo:

$$100 = 5 \cdot v(0;1) + 105 \cdot v(0;2) \Longrightarrow v(0;2) = \frac{100 - 5 \cdot v(0;1)}{105} = 0,90723$$

Dal terzo titolo abbiamo:

$$99 = 5,5 \cdot v(0;1) + 5,5 \cdot v(0;2) + 105,5 \cdot v(0;3)$$
$$\Longrightarrow v(0;3) = \frac{99 - 5,5 \cdot v(0;1) - 5,5 \cdot v(0;2)}{105,5} = 0,8417$$

Dai fattori di sconto deduciamo i tassi spot:

$$i(0;1) = \frac{1}{v(0;1)} - 1 = 0,05555$$
$$i(0;2) = \left(\frac{1}{v(0;2)}\right)^{1/2} - 1 = 0,04988$$
$$i(0;3) = \left(\frac{1}{v(0;3)}\right)^{1/3} - 1 = 0,05912$$

Lo scadenzario del portafoglio composto di due titoli b_1 e tre titoli b_2 è:

$$\Theta = (-480; 205; 315)/(0; 1; 2)$$

Il TIR si ottiene perciò risolvendo l'equazione di equilibrio

$$315 \cdot (1+i)^{-2} + 205 \cdot (1+i)^{-1} = 480.$$

Risolviamo per interpolazione prendendo come soglie il $4,5\%$ ed il $5,5\%$:

$$i_0 = 0,045 \rightarrow A_0 = 484,6272$$
$$i_1 = 0,055 \rightarrow A_1 = 477,3253$$

Applichiamo quindi la formula dell'interpolazione:

$$i \simeq 0,045 + \frac{0,055 - 0,045}{477,3253 - 484,6272} \cdot (480 - 484,6272) = 0,05133$$

L'equazione di equilibrio può essere risolta in questo caso utilizzando la formula risolutiva per le equazioni algebriche di secondo grado.

2) Dati i seguenti titoli :

$$z_1 = (-99; 104)/(0; 1)$$
$$z_2 = (-99; 107)/(0; 2)$$
$$b_1 = (-99; 4, 4; 104)/(0; 1; 2; 3)$$

desumere la struttura dei tassi a pronti e a termine.

Dal primo titolo abbiamo:

$$v(0;1) = \frac{99}{104} = 0,95192$$

Dal secondo titolo abbiamo:

$$v(0;2) = \frac{99}{107} = 0,92523$$

Dal terzo titolo abbiamo:

$$99 = 4 \cdot v(0;1) + 4 \cdot v(0;2) + 104 \cdot v(0;3)$$
$$\Longrightarrow v(0;3) = \frac{99 - 4 \cdot v(0;1) - 4 \cdot v(0;2)}{104} = 0,879725$$

Dai fattori di sconto deduciamo i tassi spot:

$$i(0;1) = \frac{1}{v(0;1)} - 1 = 0,050508$$
$$i(0;2) = \left(\frac{1}{v(0;2)}\right)^{1/2} - 1 = 0,03952$$
$$i(0;3) = \left(\frac{1}{v(0;3)}\right)^{1/3} - 1 = 0,04364$$

Utilizzando infine le relazioni di non arbitraggio possiamo dedurre i tassi a termine:

$$i(0;1;2) = \frac{v(0;1)}{v(0;2)} - 1 = \frac{0,95192}{0,92523} - 1 = 0,02885$$
$$i(0;2;3) = \frac{v(0;2)}{v(0;3)} - 1 = \frac{0,92523}{0,879725} - 1 = 0,05173$$

$$i(0;1;3) = \sqrt{\frac{v(0;1)}{v(0;3)}} - 1 = \sqrt{\frac{0{,}95192}{0{,}879725}} - 1 = 0,04022.$$

3) Dati i seguenti *zero coupon bond*:

$$z_1 = (-97; 100)/(0; 1)$$
$$z_2 = (-94; 100)/(0; 2)$$
$$z_3 = (-91; 100)/(0; 3)$$

determinare il prezzo dell'obbligazione $(P; 5; 5; 105)/(0; 1; 2; 3)$.

Dal primo titolo abbiamo:

$$v(0; 1) = \frac{97}{100} = 0,97$$

Dal secondo titolo abbiamo:

$$v(0; 2) = \frac{94}{100} = 0,94$$

Dal terzo titolo abbiamo:

$$v(0; 3) = \frac{91}{100} = 0,91$$

Il prezzo dell'obbligazione sarà perciò:

$$P = 5 \cdot v(0; 1) + 5 \cdot v(0; 2) + 105 \cdot v(0; 3) = 5 \cdot 0,97 + 5 \cdot 0,94 + 105 \cdot 0,91 = 105,1$$

4) Calcolare la *duration* del titolo $(5; 5; 105)/(1; 2; 3)$ sapendo che $v(0; 1) = 0,95$; $v(0; 2) = 0,90$ e $v(0; 3) = 0,85$.

Applicando la definizione di *duration* avremo:

$$\widehat{D} = \frac{1 \cdot 5 \cdot v(0;1) + 2 \cdot 5 \cdot v(0;2) + 3 \cdot 105 \cdot v(0;3)}{5 \cdot v(0;1) + 5 \cdot v(0;2) + 105 \cdot v(0;3)} = \frac{281{,}5}{98{,}5} = 2,8578.$$

5) In un certo momento, il mercato è formato da quattro *zero coupon bond*:

$$z_1 = (-100; 120)/(0; 1)$$
$$z_2 = (-100; 130)/(0; 2)$$
$$z_3 = (-100; 145)/(0; 3)$$
$$z_4 = (-100; 155)/(0; 4)$$

Ricavare da queste informazioni la struttura dei tassi a pronti e a termine e determinare il prezzo e la *duration* dell'obbligazione $(P; 10; 10; 110)/(0; 1; 2; 3)$.

Dal primo titolo abbiamo:

$$v(0; 1) = \frac{100}{120} = 0,8333$$

Dal secondo titolo abbiamo:

$$v(0; 2) = \frac{100}{130} = 0,7692$$

Dal terzo titolo abbiamo:

$$v(0; 3) = \frac{100}{145} = 0,6897$$

Dal quarto titolo abbiamo:

$$v(0; 4) = \frac{100}{155} = 0,6452$$

Dai fattori di sconto deduciamo i tassi spot:

$$i(0; 1) = \frac{1}{v(0;1)} - 1 = 0,20$$

$$i(0; 2) = \left(\frac{1}{v(0;2)}\right)^{1/2} - 1 = 0,14017$$

$$i(0; 3) = \left(\frac{1}{v(0;3)}\right)^{1/3} - 1 = 0,13185$$

$$i(0; 4) = \left(\frac{1}{v(0;4)}\right)^{1/4} - 1 = 0,11579$$

Utilizzando infine le relazioni di non arbitraggio possiamo dedurre i tassi a termine:

$$i(0;1;2) = \frac{v(0;1)}{v(0;2)} - 1 = \frac{0{,}8333}{0{,}7692} - 1 = 0,0833$$
$$i(0;2;3) = \frac{v(0;2)}{v(0;3)} - 1 = \frac{0{,}7692}{0{,}6897} - 1 = 0,11538$$
$$i(0;3;4) = \frac{v(0;3)}{v(0;4)} - 1 = \frac{0{,}6897}{0{,}6452} - 1 = 0,06896.$$

Il prezzo dell'obbligazione sarà:

$$P = 10 \cdot v(0;1) + 10 \cdot v(0;2) + 110 \cdot v(0;3) = 91,888$$

ed infine la sua *duration* vale:

$$\widehat{D} = \frac{1 \cdot 10 \cdot v(0;1) + 2 \cdot 10 \cdot v(0;2) + 3 \cdot 110 \cdot v(0;3)}{91{,}888} = 2,7349.$$

6) Dati i seguenti titoli :

$$z_1 = (-96;100)/(0;1)$$
$$z_2 = (-99;5;105)/(0;1;2)$$
$$b_1 = (-100;4,6;108)/(0;1;2;3)$$

desumere la struttura dei tassi a pronti e a termine.

Dal primo titolo abbiamo:

$$v(0;1) = \frac{96}{100} = 0,96$$

Dal secondo titolo abbiamo:

$$99 = 5 \cdot v(0;1) + 105 \cdot v(0;2)$$
$$\Longrightarrow v(0;2) = \frac{99 - 5 \cdot v(0;1)}{105} = 0,89714$$

Dal terzo titolo abbiamo:

$$100 = 4 \cdot v(0;1) + 6 \cdot v(0;2) + 108 \cdot v(0;3)$$
$$\Longrightarrow v(0;3) = \frac{100 - 4 \cdot v(0;1) - 6 \cdot v(0;2)}{108} = 0,84063$$

Dai fattori di sconto deduciamo i tassi spot:

$$i(0;1) = \frac{1}{v(0;1)} - 1 = 0,04167$$
$$i(0;2) = \left(\frac{1}{v(0;2)}\right)^{1/2} - 1 = 0,05577$$
$$i(0;3) = \left(\frac{1}{v(0;3)}\right)^{1/3} - 1 = 0,05962$$

Utilizzando infine le relazioni di non arbitraggio possiamo dedurre i tassi a termine:

$$i(0;1;2) = \frac{v(0;1)}{v(0;2)} - 1 = \frac{0{,}96}{0{,}89714} - 1 = 0,07006$$
$$i(0;2;3) = \frac{v(0;2)}{v(0;3)} - 1 = \frac{0{,}89714}{0{,}84063} - 1 = 0,06735$$
$$i(0;1;3) = \sqrt{\frac{v(0;1)}{v(0;3)}} - 1 = \sqrt{\frac{0{,}96}{0{,}84063}} - 1 = 0,0687.$$

7) Supponiamo che un titolo abbia valore 99 e duration pari a 2. Quale sarà il cambiamento di valore del titolo se il tasso, dal 6% subisce un incremento di due punti?

Avremo

$$\Delta V = -\frac{2}{1+0{,}06} \cdot 99 \cdot (+0,02) = -3,7358$$

perciò il valore del titolo diminuisce.

8) Supponiamo che un titolo abbia valore $102,1$ e duration pari a $4,1$. Quale sarà il cambiamento di valore del titolo se il tasso, dal $4,5\%$ subisce una diminuzione di un punto?

Avremo

$$\Delta V = -\tfrac{4,1}{1+0,045} \cdot 102,1 \cdot (-0,01) = +4,0058$$

perciò il valore del titolo aumenta.

9) Supponiamo che un titolo abbia valore $99,1$ e duration pari a $4,71$. Quale sarà il cambiamento di valore del titolo se il tasso, dal 5% subisce un aumento di un punto?

Avremo

$$\Delta V = -\tfrac{4,71}{1+0,05} \cdot 99,1 \cdot (+0,01) = -4,4453$$

perciò il valore del titolo diminuisce.

6 L'immunizzazione finanziaria.

6.1 Premesse.

Consideriamo un titolo generico Θ_i ($i = 1, \ldots, N$) che offre importi $(\Theta_i)_{x_k}$ al tempo t_k. Se compro π_i unità del titolo Θ_i compongo un portafoglio Θ che offre al tempo t_k il generico importo

$$(\Theta)_k = \sum_{i=1}^{N} \pi_i \cdot (\Theta_i)_{x_k}$$

Abbiamo costruito un "*metatitolo"*, ossia un "aggregazione" di titoli.

Esempio.

Consideriamo i tre titoli che hanno per scadenzario:

$$\Theta_1 = (10; 10; 110)/(1; 2; 3)$$
$$\Theta_2 = (5; 105)/(1; 2)$$
$$\Theta_3 = (7; 7; 107)/(1; 2; 3)$$

Posso comporre un portafoglio Θ prendendo le quote $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 2$ e $\pi_3 = 1$. Lo scadenzario del portafoglio si ottiene come semplice operazione algebrica:

$$(\Theta)_1 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 7 = 27$$
$$(\Theta)_2 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 105 + 1 \cdot 7 = 227$$
$$(\Theta)_3 = 1 \cdot 110 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 107 = 217$$

perciò:

$$\Theta = (27; 227; 217)/(1; 2; 3)$$

Una volta scelte le quote π_i ho un portafoglio il cui valore dipende dalla struttura dei tassi:

$$V(0; \Theta) = \sum_{k=1}^{n} (\Theta)_k \cdot v(0; t_k)$$

dove t_n è l'ultima scadenza. Se pongo $i(0; t_k) = i$, avremo:

$$V(0; \Theta; i) = \sum_{k=1}^{n} (\Theta)_k \cdot (1 + i)^{-t_k}$$

Ovviamente la funzione $V(0; \Theta; i)$ è decrescente rispetto al tasso i.

Ipotizziamo ora di avere un vettore di passività:

$$L = (u_1, u_2, \ldots, u_n)/(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

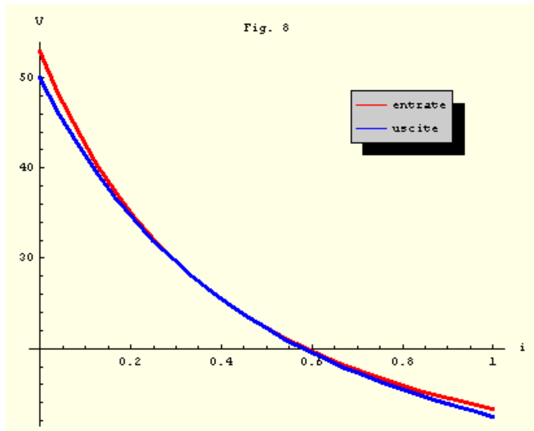
Il valore attuale delle passività, calcolato in base ad un tasso costante i è dato da:

$$V(0; L; i) = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot (1 + i)^{-t_k}$$

L'intermediario vuole garantirsi la disponibilità finanziaria utile a coprire le sue uscite.

6.2 Portafoglio immunizzato.

Ipotizziamo di avere un vettore di passività e di voler comporre un portafoglio di attività contraddistinto dall'andamento in figura 8.



Ipotizziamo che V_ϑ rappresenta il valore del portafoglio di attività mentre V_u rappresenta il valore delle passività. Le due curve hanno ovviamente un andamento decrescente rispetto al tasso inoltre hanno un punto in comune $(i^*; V^*)$ in corrispondenza del tasso di mercato i^*. La proprietà più importante riguarda il fatto che la curva delle entrate sta sempre al di sopra rispetto a quello delle uscite. Questa forma è auspicabile perché se il tasso i varia, il valore delle entrate è sempre più che sufficiente a coprire le uscite.

Un portafoglio di entrate con questa caratteristica si dirà **immunizzato dal rischio finanziario.**

La teoria dell'immunizzazione finanziaria è finalizzata ad assicurare all'operatore la disponibilità finanziaria necessaria per far fronte alle uscite prospettiche (future).

Ci poniamo adesso il problema di trovare una procedura che consente di determinare le quote di composizione affinché il portafoglio che ne risulta sia immunizzato.

Dall'analisi del grafico precedente, possiamo evidenziare tre proprietà:

1) le due curve hanno il punto comune $(i^*; V^*)$;

2) le due curve sono tangenti nel punto $(i^*; V^*)$

3) la curva delle entrate è più convessa rispetto a quella delle uscite.

Ciascuna di queste condizioni si può esprimere in maniera analitica nel modo seguente:

1) il **vincolo di bilancio** impone che il valore attuale del portafoglio delle entrate sia uguale al valore attuale delle uscite (indichiamo con i^* il tasso di mercato):

$$V(0; \Theta; i^*) = V(0; L; i^*);$$

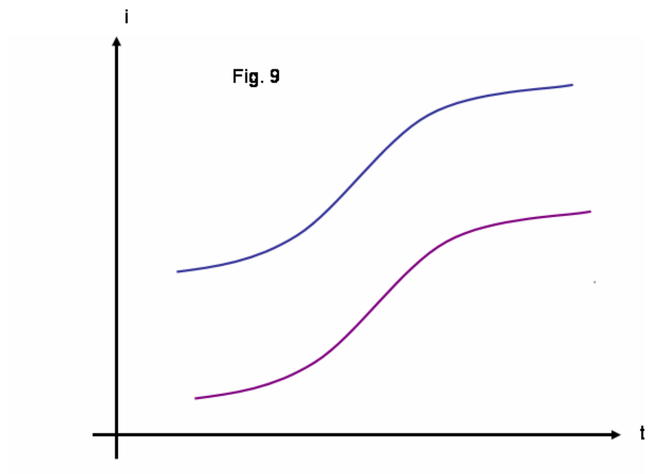
2) il **vincolo di duration** impone che la *duration* del primo ordine del portafoglio delle entrate sia uguale a quella delle uscite:

$$\widehat{D}(0; \Theta; i^*) = \widehat{D}(0; L; i^*);$$

3) il **vincolo di convessità** impone che la *duration* del secondo ordine del portafoglio delle entrate sia maggiore od uguale a quella delle uscite:

$$\widehat{D}^{(2)}(0; \Theta; i^*) \geq \widehat{D}^{(2)}(0; L; i^*).$$

Osservazione.



Nelle ipotesi basilari dell'immunizzazione classica, si ipotizza che i tassi evolvano per "shift additivi". Ciò significa che la curva dei tassi si sposta ma senza cambiare la propria forma (vedere figura 9).

La teoria dell'immunizzazione classica si basa sul seguente teorema:

Teorema (Redington).

Un portafoglio di attività è immunizzato rispetto ad un vettore di passività (ipotizzando una evoluzione dei tassi per shift additivi) se sono verificati i vincoli di bilancio, duration e convessità.

Nel caso in cui si debba immunizzare una singola uscita, si può dimostrare che il terzo vincolo di dispersione è ridondante. In tal caso sono sufficienti i primi due vincoli (questo è l'enunciato del **teorema di Fisher-Weil**).

Esempio.

Sia dato il seguente vettore di uscite $u = (0; 100; 0)/(1, 2; 3)$. Vogliamo costruire un portafoglio immunizzato scegliendo opportunamente tra i seguenti due titoli

$$b_1 = (-95; 100)/(0; 1)$$
$$b_2 = (-99; 10; 10; 110)/(0; 1; 2; 3)$$

essendo il tasso di mercato $i = 5\%$.

Abbiamo una sola uscita perciò dobbiamo utilizzare solamente i primi due vincoli.

Per quanto riguarda la passività abbiamo:

$$V(0; u) = \frac{100}{1{,}05^2} = 90, 70$$
$$\widehat{D}(0; u) = 2$$

Per quanto riguarda gli attivi, indichiamo con π_1 e π_2 le quote di composizione del portafoglio che vogliamo determinare. Lo scadenzario del portafoglio delle entrate sarà:

$$\Theta = (100 \cdot \pi_1 + 10 \cdot \pi_2; 10 \cdot \pi_2; 110 \cdot \pi_2)/(1; 2; 3).$$

Avremo perciò:

$$V(0;\Theta) = \frac{100\cdot\pi_1+10\cdot\pi_2}{1{,}05^1} + \frac{10\cdot\pi_2}{1{,}05^2} + \frac{110\cdot\pi_2}{1{,}05^3} = 95,23 \cdot \pi_1 + 113,62 \cdot \pi_2$$

$$\widehat{D}(0;\Theta) = \frac{1\cdot(100\cdot\pi_1+10\cdot\pi_2)\cdot 1{,}05^{-1}+2\cdot 10\cdot\pi_2\cdot 1{,}05^{-2}+3\cdot 110\cdot\pi_2\cdot 1{,}05^{-3}}{90{,}70} = \frac{95{,}23\cdot\pi_1+312{,}723\cdot\pi_2}{90{,}70}$$

I due vincoli saranno quindi:

vincolo di bilancio $\rightarrow \quad 95,23 \cdot \pi_1 + 113,62 \cdot \pi_2 = 90,70$

vincolo di duration $\rightarrow \quad \frac{95{,}23\cdot\pi_1+312{,}723\cdot\pi_2}{90{,}70} = 2$

Dobbiamo a questo punto mettere a sistema queste due condizioni (si tratta di un sistema lineare in due incognite). Risolvendo si ottiene:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0,455 \\ \pi_2 &= 0,4107 \end{aligned}$$

Esempio.

Calcolare le quote dei titoli z_1 e z_2 che immunizzano un portafoglio da un'uscita $L = 2.000$ che si verifica in $t = 2$ assumendo z_1 e z_2 i seguenti:

$$z_1 = (-101; 110)/(0; 1)$$

$$z_2 = (-100,1; 10; 10; 110)/(0; 1; 2; 3)$$

essendo il tasso $i = 0,09$. Ipotizzando inoltre un aumento del tasso di tre punti percentuali, calcolare il valore netto di portafoglio (valore attività meno valore passività) in corrispondenza della duration. Partendo dai prezzi dei due titoli calcolare anche il prezzo del portafoglio di attività.

Abbiamo una sola uscita perciò dobbiamo utilizzare solamente i primi due vincoli.

Per quanto riguarda la passività abbiamo:

$$V(0;L) = \frac{2.000}{1{,}09^2} = 1.683,35999$$

$$\widehat{D}(0;L) = 2$$

Per quanto riguarda gli attivi, indichiamo con π_1 e π_2 le quote di composizione del portafoglio che vogliamo determinare. Lo scadenzario del portafoglio delle entrate sarà:

$$\Theta = (110 \cdot \pi_1 + 10 \cdot \pi_2; 10 \cdot \pi_2; 110 \cdot \pi_2)/(1; 2; 3).$$

Avremo perciò:

$$V(0;\Theta) = \frac{110\cdot\pi_1+10\cdot\pi_2}{1{,}09^1} + \frac{10\cdot\pi_2}{1{,}09^2} + \frac{110\cdot\pi_2}{1{,}09^3} = 100,9174 \cdot \pi_1 + 102,5313 \cdot \pi_2$$

$$\widehat{D}(0;\Theta) = \frac{1\cdot(110\cdot\pi_1+10\cdot\pi_2)\cdot 1{,}09^{-1}+2\cdot 10\cdot\pi_2\cdot 1{,}09^{-2}+3\cdot 110\cdot\pi_2\cdot 1{,}09^{-3}}{1.683{,}35999} =$$

$$\frac{100{,}9174\cdot\pi_1+280{,}8285\cdot\pi_2}{1.683{,}35999} =$$

$$= 0,05995 \cdot \pi_1 + 0,1668 \cdot \pi_2 = 2$$

I due vincoli saranno quindi:

vincolo di bilancio $\rightarrow \quad 100,9174 \cdot \pi_1 + 102,5313 \cdot \pi_2 = 1.683,35999$

vincolo di duration $\rightarrow \quad \frac{95{,}23\cdot\pi_1+312{,}723\cdot\pi_2}{90{,}70} = 2$

Dobbiamo a questo punto mettere a sistema queste due condizioni (si tratta di un sistema lineare in due incognite). Risolvendo si ottiene:

$$\pi_1 = 7,0883$$
$$\pi_2 = 9,4413$$

Il costo del portafoglio sarà:

$P = 101 \cdot \pi_1 + 100,1 \cdot \pi_2 = 101 \cdot 7,0883 + 100,1 \cdot 9,4413 = 1.660,9906$

Supponiamo adesso che il tasso di mercato passi al 12% dopo l'aumento dei tre punti percentuali. Il valore del portafoglio di attivi all'epoca $t = 2$ (in corrispondenza della duration) sarà:

$V(2;\Theta) = (110 \cdot \pi_1 + 10 \cdot \pi_2) \cdot (1+i) + 10 \cdot \pi_2 + \frac{110 \cdot \pi_2}{1+i} = 2.000,70242$

perciò il valore netto vale:

$VN = V(2;\Theta) - V(2;L) = 2.000,70242 - 2.000 = 0,70242 > 0.$

Abbiamo un valore netto positivo, compatibilmente con il fatto che il portafoglio è immunizzato.

Esercizio.

Calcolare le quote dei titoli z_1 e z_2 che immunizzano un portafoglio da un'uscita $L = 500$ che si verifica in $t = 2$ assumendo z_1 e z_2 i seguenti:

$$z_1 = (-95; 100)/(0; 1)$$
$$z_2 = (-96; 110)/(0; 3)$$

essendo il tasso costante $i = 0,05$. Partendo dai prezzi dei due titoli calcolare anche il prezzo del portafoglio di attività.

Abbiamo una sola uscita perciò dobbiamo utilizzare solamente i primi due vincoli.

Per quanto riguarda la passività abbiamo:

$$V(0;L) = \frac{500}{1,05^2} = 453,51474$$
$$\widehat{D}(0;L) = 2$$

Per quanto riguarda gli attivi, indichiamo con π_1 e π_2 le quote di composizione del portafoglio che vogliamo determinare. Lo scadenzario del portafoglio delle entrate sarà:

$$\Theta = (100 \cdot \pi_1; 110 \cdot \pi_2)/(1; 3).$$

Avremo perciò:

$$V(0;\Theta) = \frac{100 \cdot \pi_1}{1,05^1} + \frac{110 \cdot \pi_2}{1,05^3} = 95,238 \cdot \pi_1 + 95,02214 \cdot \pi_2$$
$$\widehat{D}(0;\Theta) = \frac{1 \cdot (100 \cdot \pi_1) \cdot 1,05^{-1} + 3 \cdot 110 \cdot \pi_2 \cdot 1,05^{-3}}{453,51474} = \frac{95,23809 \cdot \pi_1 + 285,06641 \cdot \pi_2}{453,51474} =$$
$$= 0,21 \cdot \pi_1 + 0,62857 \cdot \pi_2 = 2$$

I due vincoli saranno quindi:

vincolo di bilancio $\rightarrow \quad 95,238 \cdot \pi_1 + 95,02214 \cdot \pi_2 = 453,51474$

vincolo di duration $\rightarrow \quad 0,21 \cdot \pi_1 + 0,62857 \cdot \pi_2 = 2$

Dobbiamo a questo punto mettere a sistema queste due condizioni (si tratta di un sistema lineare in due incognite). Risolvendo si ottiene:

$$\pi_1 = 2,38095$$
$$\pi_2 = 2,38636$$

Il costo del portafoglio sarà:

$$P = 95 \cdot \pi_1 + 96 \cdot \pi_2 = 95 \cdot 2,38095 + 96 \cdot 2,38636 = 455,2814.$$

Esercizio.

Calcolare le quote dei titoli z_1 e z_2 che immunizzano un portafoglio da un'uscita $L = 1.200$ che si verifica in $t = 2$ assumendo z_1 e z_2 i seguenti:

$$z_1 = (-300; 320)/(0; 1)$$
$$z_2 = (-475; 500)/(0; 3)$$

essendo il tasso istantaneo d'interesse $\delta = 0,10$. Partendo dai prezzi dei due titoli calcolare anche il prezzo del portafoglio di attività.

Abbiamo una sola uscita perciò dobbiamo utilizzare solamente i primi due vincoli.

Il tasso d'interesse sarà:

$$i = e^{\delta} - 1 = 0,10517$$

Per quanto riguarda la passività abbiamo:

$$V(0; L) = \frac{1.200}{1,10517^2} = 982,4769$$
$$\widehat{D}(0; L) = 2$$

Per quanto riguarda gli attivi, indichiamo con π_1 e π_2 le quote di composizione del portafoglio che vogliamo determinare. Lo scadenzario del portafoglio delle entrate sarà:

$$\Theta = (320 \cdot \pi_1; 500 \cdot \pi_2)/(1; 3).$$

Avremo perciò:

$$V(0; \Theta) = \frac{320 \cdot \pi_1}{1,10517^1} + \frac{500 \cdot \pi_2}{1,10517^3} = 289,548 \cdot \pi_1 + 370,4091 \cdot \pi_2$$
$$\widehat{D}(0; \Theta) = \frac{1 \cdot (320 \cdot \pi_1) \cdot 1,10517^{-1} + 3 \cdot 500 \cdot \pi_2 \cdot 1,10517^{-3}}{982,4769} = \frac{289,548 \cdot \pi_1 + 1.111,23 \cdot \pi_2}{982,4769} =$$
$$= 0,2947 \cdot \pi_1 + 0,13105 \cdot \pi_2 = 2$$

I due vincoli saranno quindi:

vincolo di bilancio $\rightarrow \quad 289,548 \cdot \pi_1 + 370,4091 \cdot \pi_2 = 982,4769$

vincolo di duration $\rightarrow \quad 0,2947 \cdot \pi_1 + 0,13105 \cdot \pi_2 = 2$

Dobbiamo a questo punto mettere a sistema queste due condizioni (si tratta di un sistema lineare in due incognite). Risolvendo si ottiene:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 1,3262 \\ \pi_2 &= 1,6966 \end{aligned}$$

Il costo del portafoglio sarà:

$$P = 1,3262 \cdot \pi_1 + 1,6966 \cdot \pi_2 = 1,3262 \cdot 300 + 1,6966 \cdot 475 = 1.138,918.$$

Esercizio.

Calcolare le quote dei titoli b_1, b_2 e b_3 che immunizzano un portafoglio da un vettore di uscite $L = (100; 0; 100; 0)/(1; 2; 3; 4)$ assumendo b_1, b_2 e b_3 i seguenti:

$$b_1 = (-96,01; 4; 104)/(0; 1; 2)$$
$$b_2 = (-96,85; 5; 5; 105)/(0; 1; 2; 3)$$
$$b_3 = (-95,92; 5; 5; 5; 105)/(0; 1; 2; 3; 4)$$

essendo la struttura dei tassi di mercato piatta ed espressa da un tasso istantaneo $\delta = 0,05$ nell'ipotesi che si desideri avere una *duration* di secondo ordine dell'attivo pari a $1,2$ volte quella del passivo. Abbiamo più di un'uscita perciò dobbiamo utilizzare i tre vincoli (teorema di Redington).

Determiniamo il tasso annuo:

$$i = e^{0,05} - 1 = 0,05127 \rightarrow v = (1+i)^{-1} = 0,95123$$

Indichiamo con α, β e γ le quote del portafoglio composto dai titoli b_1, b_2 e b_3.

Lo scadenzario del portafoglio delle entrate sarà:

$$\Theta = (4\alpha + 5\beta + 5\gamma; 104\alpha + 5\beta + 5\gamma; 105\beta + 5\gamma; 105\gamma)/(1; 2; 3; 4)$$

♦ Vincolo di bilancio:

$$V(0;\Theta) = \alpha \cdot (4v + 104v^2) + \beta \cdot (5v + 5v^2 + 105v^3) +$$
$$+\gamma \cdot (5v + 5v^2 + 5v^3 + 105v^4) = 97,908\alpha + 99,6547\beta + 99,5506\gamma$$
$$V(0;L) = 100v + 100v^3 = 181,194$$

Avremo perciò il vincolo:

$$97,908\alpha + 99,6547\beta + 99,5506\gamma = 181,194.$$

♦ Vincolo di duration:

$$\widehat{D}(0;\Theta) = \frac{(4\alpha+5\beta+5\gamma)\cdot v + 2\cdot(104\alpha+5\beta+5\gamma)\cdot v^2 + 3\cdot(105\beta+5\gamma)\cdot v^3 + 420\gamma\cdot v^4}{181,194} =$$
$$= 1,0597\alpha + 1,5725\beta + 2,0452\gamma$$
$$\widehat{D}(0;\Theta) = \frac{100v+300v^3}{100v+100v^3} = 1,95004$$

Avremo perciò il vincolo:

$$1,0597\alpha + 1,5725\beta + 2,0452\gamma = 1,95004.$$

♦ Vincolo di dispersione:

$$\widehat{D}^{(2)}(0;\Theta) = \frac{(4\alpha+5\beta+5\gamma)\cdot v + 4\cdot(104\alpha+5\beta+5\gamma)\cdot v^2 + 9\cdot(105\beta+5\gamma)\cdot v^3 + 1.680\gamma\cdot v^4}{181,194} =$$
$$= 2,0984\alpha + 4,6151\beta + 7,9310\gamma$$
$$\widehat{D}^{(2)}(0;L) = \frac{100v+900v^3}{100v+100v^3} = 4,80017$$

Avremo perciò il vincolo:

$$2,0984\alpha + 4,6151\beta + 7,9310\gamma = 1,2 \cdot 4,80017 = 5,7602$$

Mettiamo ora a sistema le tre condizioni: otteniamo un sistema lineare in tre incognite che possiamo risolvere per sostituzione oppure con la regola di Cramer.

Si ottiene la soluzione seguente:

$$\begin{aligned} \alpha &= 3,9088 \\ \beta &= -4,1489 \\ \gamma &= 2,1288 \end{aligned}$$

Vediamo infine l'enunciato rigoroso e la dimostrazione del Teorema di Fisher-Weil:

Teorema. (**Fisher-Weil**).

Supponiamo di avere un importo $L > 0$ disponibile all'epoca $T > 0$ ed un flusso di importi non negativi $X = (x_1, ..., x_n)$ disponibili alle epoche $(t_1, ..., t_n)$. Data l'intensità istantanea d'interesse $\delta(0,t)$, supponiamo che L e X abbiano lo stesso valore attuale all'epoca zero rispetto alla struttura data:

$$V_\delta(0,X) = V_\delta(0,L)$$

Supponiamo inoltre che tra l'epoca zero e l'epoca uno l'intensità $\delta(0,t)$ subisce uno shift additivo aleatorio γ, ossia:

$$\delta^*(0^+,t) = \delta(0,t) + \gamma \qquad \text{(con } 0 < 0^+ < 1\text{).}$$

I valori attuali di L e X calcolati all'epoca 0^+ rispetto alla nuova intensità soddisfano la condizione

$$V_{\delta^*}(0^+,X) \geqslant V_{\delta^*}(0^+,L)$$

se e solo se L e X hanno la stessa duration all'epoca zero ossia

$$D^1_\delta(0,X) = T$$

Iniziamo la dimostrazione ponendo per semplicità

$$\delta(0,t) = \delta = \log(1+i)$$

Il valore attuale del flusso X è dato da:

$$V_\delta(0,X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v^{t_i}$$

dove abbiamo posto $v = (1+i)^{-1} = e^{-\delta}$ mentre per quanto riguarda l'uscita L abbiamo:

$$V_\delta(0,L) = L \cdot v^T$$

Il vincolo di bilancio può essere riformulato (all'epoca zero) nel modo seguente:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v^{t_i}}{L \cdot v^T} = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v^{t_i - T} = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r^{T - t_i} = 1$$

dove abbiamo posto il fattore di montante $r = v^{-1} = 1 + i$.

Per effetto dello shift additivo $\delta^* = \delta + \gamma$ avremo:

$$\log(1+i^*) = r^* = \log(1+i) + \gamma = \log r + \gamma$$

perciò

$$e^{\log r^*} = e^{\log r} \cdot e^\gamma$$

Si ottiene finalmente $r^* = r \cdot e^\gamma$ ossia $1 + i^* = e^\gamma \cdot (1+i)$.

Il nuovo valore della quantità Z definita precedentemente è:

$$Z^* = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (r \cdot e^\gamma)^{T - t_i} = Z^*(\gamma)$$

perciò diventa una funzione di γ, $Z^* = Z^*(\gamma)$, con $Z^*(0) = Z = 1$.

Determiniamo le caratteristiche della funzione $Z^*(\gamma)$ attraverso la sua derivata prima e seconda rispetto a γ. Si ha:

$$\frac{d}{d\gamma} Z^*(\gamma) = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (T - t_i) \cdot (r \cdot e^\gamma)^{T - t_i}$$

$$\frac{d^2}{d\gamma^2} Z^*(\gamma) = \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (T - t_i)^2 \cdot (r \cdot e^\gamma)^{T - t_i}$$

Osserviamo che la derivata seconda è non negativa per cui la funzione $Z^*(\gamma)$ è convessa.

Affinché si abbia $V_{\delta^*}(0^+, X) \geqslant V_{\delta^*}(0^+, L)$ occorre determinare sotto quale condizione sia $Z^*(\gamma) > 1$. A questo proposito è sufficiente mostrare che la derivata prima di $Z^*(\gamma)$ si annulla per $\gamma = 0$ (in effetti, tenendo conto della convessità, la funzione $Z^*(\gamma)$ avrebbe quindi un minimo assoluto in $\gamma = 0$).

La condizione richiesta si scrive:

$$\tfrac{d}{d\gamma} Z^*(0) = \tfrac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (T - t_i) \cdot (r \cdot e^0)^{T - t_i} =$$

$$= \tfrac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot T \cdot (1+i)^{T - t_i} - \tfrac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i \cdot (1+i)^{T - t_i} = 0$$

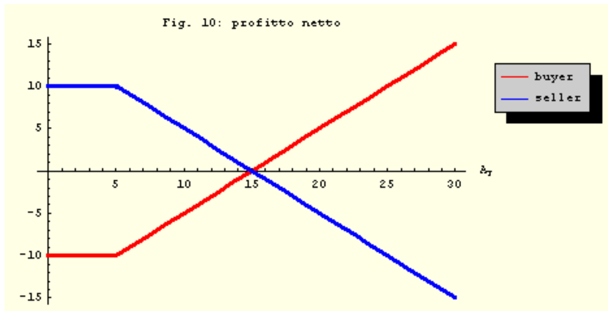
ossia:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot T \cdot (1+i)^{-t_i}}{L \cdot (1+i)^{-T}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i \cdot (1+i)^{-t_i}}{L \cdot (1+i)^{-T}} = 0$$

che possiamo riscrivere in virtù del vincolo di bilancio:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot T \cdot (1+i)^{-t_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (1+i)^{-t_i}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot t_i \cdot (1+i)^{-t_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (1+i)^{-t_i}} = 0$$

Abbiamo ottenuto in questo modo la definizione della duration, ossia $D_\delta^1(0, X) = T$.



7 La teoria delle opzioni finanziarie.

7.1 Premesse

Indichiamo con A_t il valore di un titolo azionario all'epoca t (con $t = 0, \ldots, T$).

Definiamo un'**opzione** di tipo **call** come un contratto finanziario che consente, dietro pagamento di un premio, di acquistare un titolo azionario predefinito (detto **sottostante**) ad un prezzo predeterminato K (**strike price** o **prezzo d'esercizio**) ad una scadenza T prefissata.

Definiamo un'**opzione** di tipo **put** come un contratto finanziario che consente, dietro pagamento di un premio, di vendere un titolo azionario predefinito (detto **sottostante**) ad un prezzo predeterminato (**strike price** o **prezzo d'esercizio**) ad una scadenza T prefissata.

Le opzioni call e put sono dei titoli derivati nel senso che il loro prezzo (il premio pagato che conferisce il diritto d'acquisto o di vendita) dipende dal valore che assume il sottostante.

Il sottostante, il prezzo d'esercizio e la scadenza fanno parte del contratto stesso.

Inoltre, parleremo di opzioni di tipo **europeo** se il diritto può essere esercitato esclusivamente alla scadenza prefissata T, oppure di tipo **americano** se il diritto può essere esercitato entro la scadenza prefissata T.

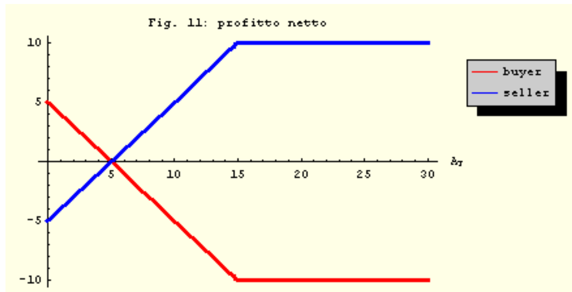
L'acquirente della call eserciterà il suo diritto solamente se il valore a scadenza dell'opzione A_T sarà minore rispetto allo strike price K, per questo motivo viene chiamato un **rialzista**. In caso di esercizio, il profitto lordo a scadenza sarà uguale alla differenza $A_T - K$, diversamente questa differenza vale $zero$. Il profitto lordo a scadenza, chiamato anche **pay-off** può essere definito nel modo seguente:

$$C_T = Max\,(A_T - K; 0).$$

Il compratore della call ("**buyer**") ha potenzialità di guadagno molto elevato, la perdita è limitata. Il profitto netto realizzato (tenendo conto del prezzo pagato C) sarà $\Pi = C_T - C$.

Si ha graficamente (con $K = 5$ e $C = 10$, figura 10):

Vediamo che si ha un profitto netto positivo quando $A_T > K + C$. Invece per $K < A_T < K + C$, non si ha un profitto netto positivo ma conviene comunque esercitare l'opzione per non perdere il premio C.



Per il venditore della call ("**seller**") abbiamo un grafico simmetrico, nel senso che la somma algebrica dei due grafici dà $zero$ (ossia ad un guadagno del seller corrisponde una perdita del buyer e viceversa).

L'acquirente della put eserciterà il suo diritto solamente se il valore a scadenza dell'opzione A_T sarà maggiore rispetto allo strike price K, per questo motivo viene chiamato un **ribassista**. In caso di esercizio, il profitto lordo a scadenza sarà uguale alla differenza $K - A_T$, diversamente questa differenza vale $zero$. Il **pay-off** può essere definito in questo caso nel modo seguente:

$$P_T = Max\,(K - A_T; 0).$$

Il seller guadagna al massimo il prezzo pagato dal compratore. Per quanto riguarda il buyer, la perdita massima è il prezzo pagato ma ci sono notevoli possibilità di guadagno.

Il profitto netto realizzato (tenendo conto del prezzo pagato P) sarà $\Pi = P_T - P$.

Si ha graficamente (con $K = 15$ e $P = 10$, figura 11):

Esempio.

Sia un'opzione call a tre mesi sul titolo *alpha* con $K = 5$ euro e $A_0 = 4,9$ euro. Se il valore a scadenza dell'azione $A_3 = 6$, il payoff vale $C_3 = Max(6 - 5; 0) = 1$. In questo caso l'esercizio dell'opzione conviene. Se il valore a scadenza dell'azione $A_3 = 4,5$, il payoff vale $C_3 = Max(4,5 - 5; 0) = 0$. In questo caso l'esercizio dell'opzione non conviene.

Esempio.

Sia un'opzione put ad un mese sul titolo *beta* con $K = 3,5$ euro e $A_0 = 3$ euro. Se il valore a scadenza dell'azione $A_1 = 2$, il payoff vale $P_1 = Max(3,5 - 2; 0) = 1,5$. In questo caso l'esercizio dell'opzione conviene. Se il valore a scadenza dell'azione $A_1 = 4$, il payoff vale $P_1 = Max(3,5 - 4; 0) = 0$. In questo caso l'esercizio dell'opzione non conviene.

Osservazione.

Supponiamo di comporre un portafoglio costituito da un azione ed un'opzione put che ha per sottostante quell'azione. Il valore a scadenza di questo portafoglio sarà:

$$V = A_T + Max\,(K - A_T; 0)$$

Esaminiamo le seguenti possibilità:

$$A_T > K \rightarrow V = A_T + 0 = A_T$$
$$A_T < K \rightarrow V = A_T + K - A_T = K$$

Perciò il valore a scadenza del nostro portafoglio non scende mai al di sotto dello strike price K. Abbiamo costruito in questo modo uno strumento di copertura del rischio chiamato **portfolio insurance.**

7.2 Il modello binomiale di Cox-Ross-Rubinstein.

Ci poniamo adesso il problema di stimare il valore di un'opzione call e put. Per fare ciò dovremo conoscere la dinamica dell'evoluzione del corso azionario A_t. Il modello più semplice, chiamato modello binomiale di Cox-Ross-Rubinstein (modello "CRR") ipotizza che in un singolo periodo il corso azionario con prezzo iniziale A possa avere solamente due movimenti: a rialzo ($A_T = A \cdot u$ con il fattore di rialzo $u > 1$), o a ribasso ($A_T = A \cdot d$ con il fattore di ribasso $d < 1$).

$$\begin{array}{ccccc} & & & & A \cdot u^2 \\ & & A \cdot u & \begin{array}{l}\nearrow \\ \searrow\end{array} & \\ A & \begin{array}{l}\nearrow \\ \searrow\end{array} & & & A \cdot u \cdot d \\ & & A \cdot d & \begin{array}{l}\nearrow \\ \searrow\end{array} & \\ & & & & A \cdot d^2 \end{array}$$

Ovviamente, dopo due periodi potremo avere due rialzi, due ribassi oppure un rialzo ed un ribasso (o viceversa).

Ad ogni possibile valore del sottostante potremo associare un payoff. Per l'opzione call avremo dopo un periodo due possibili payoff:

$$C_u = Max\,(A \cdot u - K; 0)$$
$$C_d = Max\,(A \cdot d - K; 0)$$

e dopo due periodi avremo tre possibili payoff:

$$C_{uu} = Max\left(A \cdot u^2 - K; 0\right)$$
$$C_{ud} = Max\,(A \cdot u \cdot d - K; 0)$$
$$C_{dd} = Max\left(A \cdot d^2 - K; 0\right)$$

Analogamente per l'opzione put avremo dopo un periodo due possibili payoff:

$$P_u = Max\,(K - A \cdot u; 0)$$
$$P_d = Max\,(K - A \cdot d; 0)$$

e dopo due periodi avremo tre possibili payoff:

$$P_{uu} = Max\left(K - A \cdot u^2; 0\right)$$
$$P_{ud} = Max\,(K - A \cdot u \cdot d; 0)$$
$$P_{dd} = Max\left(K - A \cdot d^2; 0\right)$$

Ipotizziamo ora di avere a disposizione un titolo **risk free** (ossia privo di rischio) che rende il tasso i (con "certezza") su base uniperiodale. Lo scadenzario di questo titolo sarà perciò $(1; 1 + i)/(0; 1)$. Costruiamo un portafoglio Ω costituito da una quota α di titoli azionari e da una quota β di titoli risk free. Imponiamo che il valore del portafoglio alla scadenza T abbia lo stesso valore di un'opzione call (scritta sullo stesso titolo azionario) in caso di rialzo del corso azionario, ossia:

$$\alpha \cdot A \cdot u + \beta \cdot (1 + i) = C_u$$

Imponiamo la stessa condizione in caso di ribasso del corso azionario, ossia:

$$\alpha \cdot A \cdot d + \beta \cdot (1+i) = C_d$$

Un portafoglio Ω che gode di questa proprietà viene chiamato **portafoglio replicante** perché replica esattamente il profilo dell'opzione sia in caso di ribasso, sia in caso di rialzo del corso azionario sottostante l'opzione. Il portafoglio replicante costituisce perciò un prodotto finanziariamente equivalente all'opzione.

Le due relazioni scritte presentano come uniche incognite le quote α e β. Mettendo a sistema queste due relazioni possiamo quindi determinare le quote del portafoglio replicante. Risolvendo il sistema nel caso generale, si ottengono le formule seguenti:

$$\alpha = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u-d)}$$

$$\beta = \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1+i) \cdot (u-d)}$$

A questo punto, per evitare opportunità di arbitraggio, il valore del portafoglio replicante all'epoca *zero* dovrà essere uguale al prezzo dell'opzione:

$$C = \alpha \cdot A + \beta \cdot 1 = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u-d)} \cdot A + \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1+i) \cdot (u-d)} = \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1+i) \cdot (u-d)}$$

Questa formula può essere riscritta in maniera equivalente. Introduciamo il coefficiente

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d}$$

Si verifica facilmente che il prezzo dell'opzione si può scrivere:

$$C = \frac{\pi \cdot C_u + (1-\pi) \cdot C_d}{1+i}$$

ossia il prezzo dell'opzione risulta essere la media ponderata dei payoff, attualizzata al tasso risk free.

Nel caso dell'opzione put, possiamo procedere in maniera simmetrica, cambiando semplicemente i payoff. Avremo pertanto:

$$\alpha = \frac{P_u - P_d}{A \cdot (u-d)}$$

$$\beta = \frac{u \cdot P_d - d \cdot P_u}{(1+i) \cdot (u-d)}$$

$$P = \frac{\pi \cdot P_u + (1-\pi) \cdot P_d}{1+i}$$

Osservazione.

Il coefficiente π è compreso tra *zero* ed *uno*, perciò lo possiamo interpretare come una probabilità. Più precisamente π è chiamato **probabilità neutrale rispetto al rischio**. In effetti dalla definizione possiamo scrivere:

$$u \cdot \pi + d \cdot (1-\pi) = 1 + i$$

per cui π è tale da rendere il valore atteso del rendimento azionario (il primo membro) pari al tasso risk free (il secondo membro).

Esempio.

Vogliamo determinare il prezzo di un'opzione call nel caso uniperiodale con i dati seguenti: $A = 80$, $K = 79,5$, $i = 10\%$, $u = 1,20$ e $d = 0,90$.

Determiniamo dapprima i payoff:

$$C_u = Max\,(80 \cdot 1,20 - 79,5; 0) = 16,5$$

$$C_d = Max\,(80 \cdot 0,90 - 79,5; 0) = 0$$

Vediamo che l'esercizio dell'opzione è conveniente solo in caso di rialzo.

La probabilità neutrale vale:

$$\pi = \frac{1+0,10-0,9}{1,20-0,90} = 0,6\overline{6}$$

perciò

$$C = \frac{0,6\overline{6} \cdot 16,5+0}{1,10} = 10$$

Utilizzando le formule precedenti possiamo determinare le quote del portafoglio replicante:

$$\alpha = \frac{C_u - C_d}{A \cdot (u-d)} = 0,6875$$

$$\beta = \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(1+i) \cdot (u-d)} = -45$$

Il prezzo dell'opzione sarà quindi

$$C = 0,6875 \cdot 80 - 45 = 10$$

(si ritrova ovviamente lo stesso risultato calcolato precedentemente).

La formula per il prezzo delle opzioni utilizzando la probabilità neutrale π può essere estesa al caso biperiodale. Possiamo interpretare π come la probabilità di avere un rialzo e quindi la probabilità complementare $1 - \pi$ come la probabilità di ribasso. Nel caso biperiodale abbiamo tre possibili valori a scadenza del corso azionario. Potremo perciò assumere che π^2 rappresenta la probabilità di un doppio rialzo, $(1-\pi)^2$ rappresenta la probabilità di un doppio ribasso ed infine $\pi \cdot (1-\pi)$ rappresenta la probabilità di un rialzo seguito da un ribasso (e viceversa). Abbiamo inoltre:

$$\pi^2 + 2\pi \cdot (1-\pi) + (1-\pi)^2 = (\pi + 1 - \pi)^2 = 1$$

ossia la somma delle probabilità di raggiungere i tre stati finali vale uno (l'evento certo).

Possiamo quindi definire il prezzo dell'opzione call nel caso biperiodale come la media ponderata dei payoff, attualizzata al tasso risk free per due periodi, ossia:

$$C = \frac{\pi^2 \cdot C_{uu} + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot C_{ud} + (1-\pi)^2 \cdot C_{dd}}{(1+i)^2}$$

Ovviamente nel caso dell'opzione put avremo

$$P = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu} + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot P_{ud} + (1-\pi)^2 \cdot P_{dd}}{(1+i)^2}$$

Osservazione.

Un'opzione con riferimento ad una data qualsiasi è detta "**in the money**" se il corso azionario è superiore allo strike (mi dà la possibilità di guadagnare); "**out of the money**" se il corso azionario è inferiore allo strike (perciò non è conveniente); "**at the money**" se sono identici corso azionario e strike.

Esempio.

Vogliamo determinare il prezzo di un'opzione call e put nel caso uniperiodale con i dati seguenti: $A = 5$, $K = 4,50$, $i = 6\%$, $u = 1,15$ e $d = 0,85$.

Determiniamo dapprima i payoff:

$$C_u = Max\,(5 \cdot 1,15 - 4,50; 0) = 1,25$$

$$C_d = Max\,(5 \cdot 0,85 - 4,50; 0) = 0$$

$$P_u = Max\,(4,50 - 5 \cdot 1,15; 0) = 0$$

$$P_d = Max\,(4,50 - 5 \cdot 0,85; 0) = 0,25$$

Vediamo che l'esercizio dell'opzione call è conveniente solo in caso di rialzo, mentre per la put solo in caso di ribasso.

La probabilità neutrale vale:

$$\pi = \frac{1+0,06-0,85}{1,15-0,85} = 0,7$$

perciò

$$C = \frac{0,7 \cdot 1,25+0}{1,06} = 0,8255$$
$$P = \frac{0+0,3 \cdot 0,25}{1,06} = 0,0708$$

Osserviamo una notevole differenza tra il valore della put e della call.

Sensibilità ai parametri.

Vogliamo adesso stabilire come varia il prezzo dell'opzione rispetto a variazioni dei parametri K, u, d, i.

⧫ Supponiamo di aumentare lo strike. Nell'esempio precedente, se prendiamo $K = 5$, avremo $C = 0,4953$ e $P = 0,2123$. Se prendiamo $K = 5,5$, avremo $C = 0,1651$ e $P = 0,3538$. Notiamo che la call diminuisce mentre la put si apprezza.

⧫ Supponiamo di aumentare il tasso risk free. Nell'esempio precedente, se prendiamo $i = 7\%$, avremo $C = 0,9174$ e $P = 0,0459$. Vediamo che la call aumenta mentre la put diminuisce. Osserviamo che il tasso i ha un effetto sia sul fattore di sconto sia nella probabilità π.

⧫ Supponiamo di aumentare il fattore di rialzo u. Nell'esempio precedente, se prendiamo $u = 1,3$, avremo $C = 0,8805$ e $P = 0,1258$. Vediamo che la call e la put aumentano.

⧫ Supponiamo di diminuire il fattore di ribasso d. Nell'esempio precedente, se prendiamo $d = 0,5$, avremo $C = 1,0160$ e $P = 0,2612$. Vediamo che la call e la put aumentano anche in questo caso.

Esempio.

Vogliamo determinare il prezzo di un'opzione call e put nel caso biperiodale con i dati seguenti: $A = 5$, $K = 5$, $i = 5\%$, $u = 1,10$ e $d = 0,90$.

I valori del corso azionario a scadenza saranno $6,05$, $4,95$ e $4,05$.

I payoff per la call varranno perciò:

$$C_{uu} = 1,05$$
$$C_{ud} = 0$$
$$C_{dd} = 0$$

La probabilità neutrale vale:

$$\pi = \frac{1+0,05-0,90}{1,10-0,90} = 0,75$$

perciò

$$C = \frac{0,75^2 \cdot 1,05+0+0}{1,05^2} = 0,5357$$

Si trova analogamente che $P = 0,0709$.

Esercizio.

Vogliamo determinare il prezzo di un'opzione call nel caso uniperiodale con i dati seguenti: $A = 6$, $K = 6,1$, $i = 5\%$, $u = 1,2$ e $d = 0,8$.

Determiniamo dapprima i payoff:

$$C_u = Max\,(6 \cdot 1,2 - 6,1; 0) = 1,1$$
$$C_d = Max\,(6 \cdot 0,8 - 6,1; 0) = 0$$

Vediamo che l'esercizio dell'opzione call è conveniente solo in caso di rialzo.

La probabilità neutrale vale:

$$\pi = \frac{1+0,05-0,80}{1,20-0,80} = 0,625$$

perciò

$$C = \frac{0,625 \cdot 1,10+0}{1,05} = 0,65$$

Calcoliamo infine le quote del portafoglio replicante. Dobbiamo risolvere il sistema costituito dalle due equazioni:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 6 \cdot 1,2 + \beta \cdot 1,05 &= 1,1 \\ \alpha \cdot 6 \cdot 0,8 + \beta \cdot 1,05 &= 0 \end{aligned}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,46 \\ \beta &= -2,10 \end{aligned}$$

Possiamo anche ricalcolare il valore dell'opzione:

$$C = \alpha \cdot A + \beta = 0,46 \cdot 6 - 2,10 = 0,65$$

Esercizio.

Vogliamo determinare il prezzo di un'opzione put nel modello CRR nel caso uniperiodale con i dati seguenti: $A = 99$, $K = 100$, $i = 5\%$, $u = 1,2$ e $d = 0,9$. Calcolare inoltre le quote del portafoglio replicante.

Determiniamo dapprima i payoff:

$$P_u = Max\,(100 - 99 \cdot 1,2; 0) = 0$$

$$P_d = Max\,(100 - 99 \cdot 0,9; 0) = 10,9$$

Vediamo che l'esercizio dell'opzione put è conveniente solo in caso di ribasso.

La probabilità neutrale vale:

$$\pi = \frac{1+0,05-0,90}{1,20-0,90} = 0,50$$

perciò

$$P = \frac{0 \cdot 0,5+10,9 \cdot 0,5}{1,05} = 5,19$$

Calcoliamo infine le quote del portafoglio replicante. Dobbiamo risolvere il sistema costituito dalle due equazioni:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 99 \cdot 1,2 + \beta \cdot 1,05 &= 0 \\ \alpha \cdot 99 \cdot 0,9 + \beta \cdot 1,05 &= 10,9 \end{aligned}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{aligned} \alpha &= -0,367 \\ \beta &= 41,524 \end{aligned}$$

Possiamo anche ricalcolare il valore dell'opzione:

$$C = \alpha \cdot A + \beta = -0,367 \cdot 99 + 41,524 = 5,19$$

Esercizio.

Vogliamo determinare il prezzo di un'opzione call nel modello CRR nel caso uniperiodale con i dati seguenti: $A = 9$, $K = 9,5$, $i = 4\%$, $u = 1,1$ e $d = 0,9$. Calcolare inoltre le quote del portafoglio replicante.

Determiniamo dapprima i payoff:

$$P_u = Max\,(9 \cdot 1,1 - 9,5; 0) = 0,4$$
$$P_d = Max\,(9 \cdot 0,9 - 9,5; 0) = 0$$

Vediamo che l'esercizio dell'opzione put è conveniente solo in caso di rialzo.

La probabilità neutrale vale:

$$\pi = \frac{1+0,04-0,90}{1,10-0,90} = 0,70$$

perciò

$$C = \frac{0,4 \cdot 0,7+0 \cdot 0,3}{1,04} = 0,2692$$

Calcoliamo infine le quote del portafoglio replicante. Dobbiamo risolvere il sistema costituito dalle due equazioni:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 9 \cdot 1,1 + \beta \cdot 1,04 &= 0,4 \\ \alpha \cdot 9 \cdot 0,9 + \beta \cdot 1,04 &= 0 \end{aligned}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,2222 \\ \beta &= -1,7308 \end{aligned}$$

Possiamo anche ricalcolare il valore dell'opzione:

$$C = \alpha \cdot A + \beta = 0,2222 \cdot 9 - 1,7308 = 0,2692$$

Esempio.

Vogliamo determinare il prezzo di un'opzione put nel caso biperiodale nel modello CRR con i dati seguenti: $A = 5$, $K = 4,5$, $i = 5\%$, $u = 1,25$ e $d = 0,90$.

I valori del corso azionario a scadenza saranno $7,8125$, $5,625$ e $4,05$.

I payoff varranno perciò:

$$P_{uu} = 0$$
$$P_{ud} = 0$$
$$P_{dd} = 0,45$$

La probabilità neutrale vale:

$$\pi = \frac{1+0,05-0,90}{1,25-0,90} = 0,4286$$

perciò

$$P = \frac{0+0+0,45 \cdot (1-0,4286)^2}{1,05^2} = 0,1333$$

Nel caso dell'opzione call avremo:

$$C_{uu} = 3,3125$$
$$C_{ud} = 1,125$$
$$C_{dd} = 0$$

Si trova analogamente che $C = 1,0517$.