

## MATEMATICA FINANZIARIA

### Capitalizzazione semplice e composta

Immaginiamo di impiegare € 4500 per 2 anni in una operazione finanziaria che frutta un tasso del 2,3 % annuo. Quanto avremo realizzato alla fine dell'operazione?

In un contesto simile alla situazione presentata l'importo investito (€ 4500) è il capitale  $C$ , quello che l'operazione frutta è l'interesse  $I$ ; la somma tra interesse e capitale è il montante  $M$ .

Ci sono due modalità di calcolo degli interessi:

- L'interesse viene calcolato alla fine di ogni anno sul capitale iniziale. In tal caso si parla di capitalizzazione semplice
- L'interesse viene calcolato alla fine di ogni anno sul montante già realizzato. In tal caso si parla di capitalizzazione composta.

Esaminiamo i due casi nell'esempio proposto.

- Capitalizzazione semplice: interesse del primo anno  $4500 \cdot 0,023 = € 103,5$   
interesse del secondo anno  $4500 \cdot 0,023 = € 103,5$   
montante =  $4500 + 103,5 \cdot 2 = € 4707$
- Capitalizzazione composta: interesse del primo anno  $4500 \cdot 0,023 = € 103,5$   
interesse del secondo anno  $(4500 + 103,5) \cdot 0,023 = € 105,8805$   
montante =  $4500 + 103,5 + 105,8805 = € 4709,3805$

Immaginiamo ora di impiegare € 4500 per 2 anni e 3 mesi in una operazione finanziaria che frutta un tasso del 2,3 % annuo. Quanto avremo realizzato alla fine dell'operazione?

Esaminiamo i due casi nel nuovo esempio proposto.

- Capitalizzazione semplice: interesse del primo anno  $4500 \cdot 0,023 = € 103,5$   
interesse del secondo anno  $4500 \cdot 0,023 = € 103,5$   
interesse per 3 mesi  $4500 \cdot 0,023 \cdot \frac{3}{12} = € 25,875$   
montante =  $4500 + 103,5 \cdot 2 + 25,875 = € 4732,875$
- Capitalizzazione composta: interesse del primo anno  $4500 \cdot 0,023 = € 103,5$   
interesse del secondo anno  $(4500 + 103,5) \cdot 0,023 = € 105,8805$   
interesse per 3 mesi  $(4500 + 103,5 + 105,8805) \cdot 0,023 \cdot \frac{3}{12} = € 27,079$   
montante =  $4500 + 103,5 + 105,8805 + 27,079 = € 4736,46$

Estrapoliamo il procedimento: indicando con  $n$  il numero di anni, con  $f$  la frazione di anno e con  $i$  il tasso annuo unitario

- Capitalizzazione semplice: montante dopo  $n + f$  anni  
$$M = C + I = C + C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + \dots + C \cdot i \cdot f = C(1 + ni + i \cdot f)$$
Interesse dopo  $n + f$  anni  $I = C \cdot i \cdot (n + f)$
- Capitalizzazione composta: montante alla fine del primo anno  $M = C(1 + i)$   
montante alla fine del secondo anno  
$$M = C(1 + i) + C(1 + i) \cdot i = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$
montante dopo  $n + f$  anni  
$$M = C(1 + i)^n + C(1 + i)^n \cdot i \cdot f = C(1 + i)^n(1 + if)$$

Quest'ultima procedura viene detta capitalizzazione con convenzione lineare.

E' possibile anche adottare la convenzione esponenziale, ossia calcolare il montante nel modo seguente:  $M = C(1+i)^n(1+i)^f = C(1+i)^{n+f}$

Nello specifico esempio si ottiene  $M=4500*(1+0,023)^{2+3/12}=\in 4736,23$

**Generalizziamo: indicando con  $t$  il tempo totale espresso in anni e con  $i$  il tasso annuo unitario, si ha:**

- **Capitalizzazione semplice: Interesse dopo  $t$  anni**  $I = C \cdot i \cdot t$   
**Montante dopo  $t$  anni**  $M = C(1+it)$
- **Capitalizzazione composta: Montante dopo  $t$  anni**  $M = C(1+i)^t$  (convenzione esponenziale)

## ESEMPI

**N.B Se non indicato espressamente, useremo l'anno commerciale**

1) Calcolare il montante di € 3000, impiegati per 5 anni e 11 mesi, al 3% annuo

- in capitalizzazione semplice  $M = 3000(1+0,03(5+\frac{11}{12}))=\in 3532,5$

- in capitalizzazione composta  $M = 3000(1+0,03)^{5+\frac{11}{12}} = \in 3573,344059$

2) Calcolare in quanto tempo un capitale, al tasso del 3% annuo, si raddoppia

- in capitalizzazione semplice  $2C = C(1+it)$ , quindi  $2 = 1 + 0,03t \rightarrow 33$  anni e 4 mesi

- in capitalizzazione composta  $2C = C(1+0,03)^t$ , quindi  $2 = (1+0,03)^t \rightarrow \log 2 = t \log(1+0,03) \rightarrow t = 23$  anni 5 mesi 12 giorni

3) Calcolare quale capitale, impiegato per 7 mesi e 15 giorni, al tasso del 3% annuo, fornisce un interesse di € 120

- in capitalizzazione semplice  $120 = C \cdot 0,03 \cdot \frac{7,5}{12} \rightarrow C = 6400$

- in capitalizzazione composta  $I = M - C \rightarrow 120 = C(1+0,03)^{\frac{7,5}{12}} - C \rightarrow$

$120 = C((1+0,03)^{\frac{7,5}{12}} - 1) \rightarrow C = 6435,712$

4) Calcolare a quale tasso annuo di interesse € 2300 danno un montante di € 3100, se impiegati per 3 anni.

- in capitalizzazione semplice  $3100 = 2300(1+i3) \rightarrow i = 0,115942029$  circa 11,59 %

- in capitalizzazione composta  $3100 = 2300(1+i)^3 \rightarrow 1+i = \sqrt[3]{\frac{3100}{2300}} \rightarrow i = 0,104615889$

oppure:  $\log(\frac{3100}{2300}) = 3 \log(1+i)$

$\rightarrow i = 0,104615889$  circa 10,46 %

## Tassi equivalenti

Ipotizziamo di investire € 4500 per 2 anni e 3 mesi in una operazione finanziaria che frutta un tasso del 6 % annuo. Ci chiediamo se il montante realizzato si otterrebbe ugualmente con un tasso dello 0,5% (6/12) mensile.

- in capitalizzazione semplice al 6% annuo, per 2,25 anni, si ha:

$$M = 4500(1 + 0,06 \cdot 2,25) = € 5107,5 \text{ oppure}$$

$$\text{allo } 0,005 \text{ mensile per } 27 \text{ mesi } M = 4500(1 + 0,005 \cdot 27) = € 5107,5$$

- in capitalizzazione composta al 6% annuo, in convenzione esponenziale, per 2,25 anni, si ha:  $M = 4500(1 + 0,06)^{2,25} = € 5130,393901$  oppure,

$$\text{allo } 0,005 \text{ mensile per } 27 \text{ mesi } M = 4500(1 + 0,005)^{27} = € 5148,683328$$

Si vede che i due tassi non sono equivalenti, intendendo per **tassi equivalenti quelli che, a parità di capitale e di tempo, danno lo stesso montante.**

Applicando questa definizione ad un capitale  $C$ , ad un tasso annuo  $i$  e ad un tasso mensile  $i_{12}$ , per un anno, si ottiene:

- in capitalizzazione semplice:  $M = C(1+i) = C(1+i_{12}12) \rightarrow 1+i = 1+i_{12}12 \rightarrow i = i_{12}12$

quindi, per un generico tasso periodico  $i_k$ , si ha  $i = i_k \cdot k$

Ad esempio per un tasso semestrale  $i = i_2 \cdot 2$ , per un tasso quadrimestrale,  $i = i_3 \cdot 3 \dots$

- in capitalizzazione composta:  $M = C(1+i)^1 = C(1+i_k)^k \rightarrow 1+i = (1+i_k)^k \rightarrow$

$$i = (1+i_k)^k - 1 \text{ ed anche } \sqrt[k]{1+i} - 1 = i_k$$

Spesso, in capitalizzazione composta si usa il cosiddetto **tasso annuo nominale convertibile**, che ha solo valore convenzionale; non può essere utilizzato nei calcoli, ma deve essere appunto “convertito” in tasso periodico. Se ad esempio parliamo del 6% nominale convertibile bimestralmente, per fare i calcoli useremo il tasso bimestrale dell’1% ottenuto dividendo il

nominale per 6. In generale il tasso annuo nominale è indicato con  $j_k$  ed è  $i_k = \frac{j_k}{k}$

## ESEMPI

1) Calcolare il montante realizzato con l’impiego di € 17000 per 12 anni e 5 mesi allo 0,36 % mensile.

- in capitalizzazione semplice  $M = 17000(1 + 0,0036 \cdot 149) = € 26118,8$

$$\text{oppure } M = 17000(1 + 0,0432 \cdot (12 + \frac{5}{12})) = € 26118,8$$

- in capitalizzazione composta,  $M = 17000(1 + 0,0036)^{149} = € 29039,30147$

oppure, poiché  $i = (1+i_{12})^{12} - 1 = 0,044065708$ ,

$$M = 17000(1 + 0,044065708)^{(12 + \frac{5}{12})} = € 29039,30147$$

2) Calcolare l’interesse realizzato con l’impiego di € 1570 per 2 anni 4 mesi e 16 giorni al tasso annuo nominale 5% convertibile semestralmente.

Convertiamo il tasso:  $i_2 = \frac{j_2}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$  è il tasso semestrale, quindi:

- usiamo il tasso semestrale ed esprimiamo il tempo in semestri

$$M = 1570(1+0,025)^{\left(4+\frac{4}{6}+\frac{16}{180}\right)} = \text{€} 1765,621425$$

oppure

- trasformiamo il tasso semestrale in annuo equivalente ed esprimiamo il tempo in anni

$$i = (1+i_2)^2 - 1 = 0,050625 \text{ e } M = 1570(1+0,050625)^{\left(2+\frac{4}{12}+\frac{16}{360}\right)} = \text{€} 1765,621425$$

## USO DI EXCEL

Il foglio di calcolo può essere usato per risolvere alcuni dei problemi precedenti, mediante lo strumento Ricerca obiettivo.

Ad esempio, dato il problema:

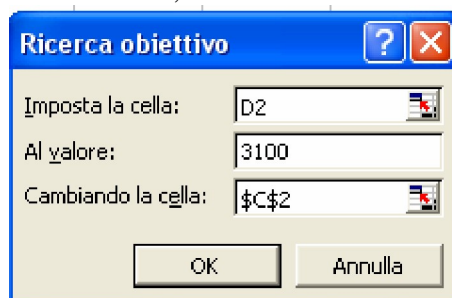
Calcolare a quale tasso annuo di interesse € 2300 danno un montante di € 3100, se impiegati per 3 anni, si possono digitare i dati in questa forma

	A	B	C	D	E
	<b>C</b>	<b>t</b>	<b>i</b>	<b>Montante semplice</b>	<b>Montante composto</b>
1					
2	2300	3			
3	2300	3			

Nella cella D2 si digita la formula =A2\*(1+C2\*B2) e nella cella E3 si digita la formula =A3\*(1+C3)^B3 ed il valore 3 ,nelle celle B2 e B3, ottenendo

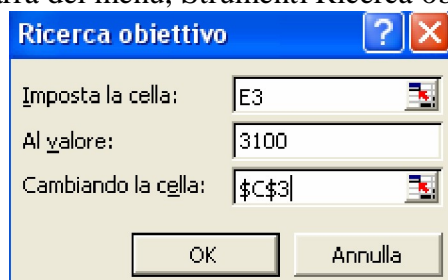
	A	B	C	D	E
	<b>C</b>	<b>t</b>	<b>i</b>	<b>Montante semplice</b>	<b>Montante composto</b>
1					
2	2300	3		2300	
3	2300	3			2300

Si va sulla cella D2, poi dalla barra dei menu, Strumenti Ricerca obiettivo



OK OK

Si va sulla cella E3, poi dalla barra dei menu, Strumenti Ricerca obiettivo



Il risultato ottenuto per il tasso è uguale a quello ottenuto precedentemente con la risoluzione di equazioni:

	A	B	C	D	E
1	<b>C</b>	<b>t</b>	<b>i</b>	<b>Montante semplice</b>	<b>Montante composto</b>
2	2300	3	0,115942029	3100	
3	2300	3	0,104615890		3100