La proporzionalità

Costanti, variabili e funzioni

Grandezze costanti

Grandezze che mantengono sempre lo stesso valore

Sono grandezze costanti:

✓la distanza Roma – Napoli;

✓la capacità di una botte;

✓la velocità della luce nel vuoto

Grandezze variabili

Grandezze che possono assumere valori diversi

Sono grandezze variabili:

✓Il peso di una persona nel corso della vita;

✓Il tempo impiegato per fare un certo lavoro;

✓La temperatura nel corso di una giornata.

Due grandezze variabili spesso sono legate tra loro in modo che il variare di una dipende dal variare dell'altra. Due grandezze di questo tipo si dicono **variabili dipendenti**.

Costanti, variabili e funzioni

Date due grandezze variabili, x variabile indipendente e y variabile dipendente, si dice che y è funzione di x se esiste una legge o proprietà di qualsiasi natura che fa corrispondere a ogni valore di x uno e un solo valore della y.

Scriveremo : $$y = f(x)$$

Che si legge "y uguale effe di x".

Esempio

Il costo totale per l'acquisto di una certa quantità di olio dipende dal costo unitario delle bottiglie:

- 6 bottiglie da € 5 ciascuna costano € 30;
- 6 bottiglie da € 4,30 ciascuna costeranno € 25,8

Il costo unitario, che può assumere liberamente valori diversi, prende il nome di **variabile indipendente** e la indichiamo con la **x.**

Il costo totale che assume valori che dipendono da quelli di x, prende nome di **variabile dipendente** e la indichiamo con **y**. Ad **ogni valore** della **x** corrisponde **uno e un solo valore** della **y**. Diciamo che y è **funzione** di x.

Funzioni matematiche

Funzioni espresse da una formula matematica si dicono **funzioni matematiche**; in esse, dato il valore di x, il corrispondente valore di y si determina con dei calcoli.

Esempio:

1. Il perimetro, y, di un quadrato il cui lato misura x, è dato dalla formula: $\mathbf{y = 4\,x}$
2. La spesa, y, per acquistare un certo numero di quaderni, x, che costano € 1,3 ciascuno è data dalla formula: $\mathbf{y = 1{,}3\,x}$

Funzioni empiriche

Funzioni non esprimibili con una formula matematica si dicono **funzioni empiriche**; in esse i valori corrispondenti delle due grandezze si ricavano solo con osservazioni e misurazioni dirette.

Esempio:

1. La quantità di pioggia caduta nei vari mesi dell’anno;
2. La temperatura atmosferica durante le ore della giornata.

Rappresentazione cartesiana di funzioni

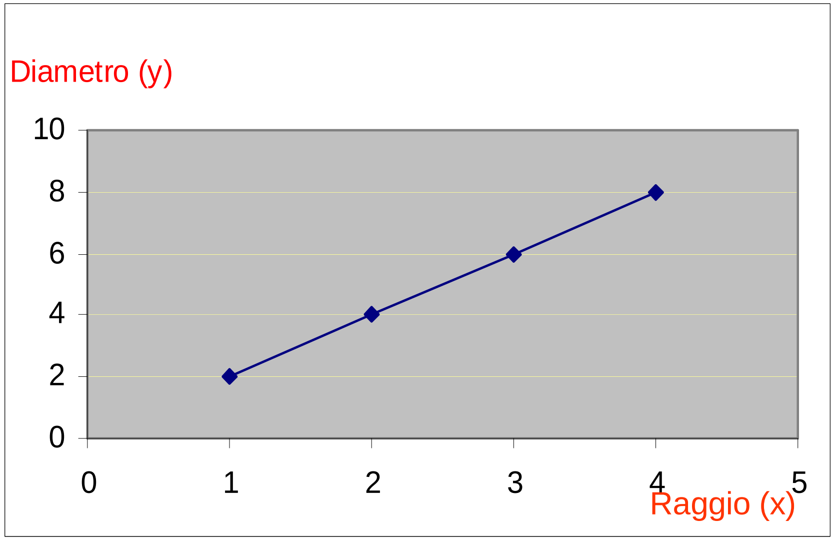
Le funzioni sia empiriche sia matematiche si possono rappresentare, su un piano cartesiano ortogonale.

Consideriamo la funzione matematica che lega il raggio x di una circonferenza e il diametro y:

$$y = 2x$$

Compiliamo la tabella dei valori e, fissato il sistema di riferimento cartesiano, rappresentiamo i punti corrispondenti ai valori ottenuti.

Raggio (x)	**1**	**2**	**3**	**4**
Diametro (y)	**2**	**4**	**6**	**8**



Grandezze direttamente proporzionali

Consideriamo due grandezze variabili x e y, tali che y = f (x), i cui valori sono dati dalla seguente tabella:

Quantità di farina acquistata in Kg (x)	**Spesa per l'acquisto in Euro (y)**
2	1,5
4	3
6	4,5
8	6

Osservando la tabella notiamo che:

Le due grandezze considerate sono tali che, quando la prima raddoppia, anche la seconda raddoppia ($2 \rightarrow 4$; $1{,}5 \rightarrow 3$), quando la prima triplica anche la seconda triplica e così via.

Le due grandezze sono tali che il rapporto y:x si mantiene costante:

$$\frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4} = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$$

Grandezze direttamente proporzionali

Possiamo scrivere che:

$$\frac{y}{x} = k \qquad o\ anche \qquad \mathrm{y} = \mathrm{kx}$$

Due grandezze di questo tipo si dicono **direttamente proporzionali** e **k** rappresenta il **coefficiente di proporzionalità diretta**.

Riassumiamo:

Due grandezze variabili dipendente x e y si dicono **direttamente proporzionali** se, al raddoppiare o dimezzare, triplicare, della variabile indipendente x, ne consegue il raddoppiare (o dimezzare), triplicare (o diventare un terzo),quadruplicare della variabile dipendente y.

Due grandezze direttamente proporzionali x e y sono tali che il loro rapporto si mantiene costante:

$$\frac{y}{x} = k \qquad o \qquad \mathrm{y} = \mathrm{kx}$$

Grandezze inversamente proporzionali

Consideriamo due grandezze variabili x e y, tali che y = f (x), i cui valori sono dati dalla seguente tabella:

Velocità di una automobile in Km/h (x)	**Tempo impiegato a fare un percorso in minuti (y)**
60	150
120	75
180	50
………	………

Osservando la tabella notiamo che:

Le due grandezze considerate sono tali che, quando la prima raddoppia, la seconda dimezza (60→ 120; 150 → 75), quando la prima triplica, la seconda diventa un terzo (60→180; 150 →50)

Le due grandezze sono tali che il prodotto **x** · **y** si mantiene costante:

60 · 150 = 120 · 75 = 180 · 50 = 9000

Grandezze inversamente proporzionali

Possiamo scrivere che:

$$xy = h \qquad o\ anche \qquad y = \frac{h}{x}$$

Due grandezze di questo tipo si dicono **direttamente proporzionali** e **h** rappresenta il **coefficiente di proporzionalità inversa**.

Riassumiamo:

Due grandezze variabili dipendenti x e y si dicono **inversamente proporzionali** se raddoppiando,triplicando, quadruplicando ……. la variabile indipendente x, si dimezza, diventa un terzo, un quarto ,,,,,, la variabile dipendente y; e se dimezzando, diventando un terzo, un quarto …. la x, raddoppia, triplica, quadruplica …….la y.

Due grandezze inversamente proporzionali x e y sono tali che il loro prodotto si mantiene costante:

$$xy = h \qquad oppure \qquad y = \frac{h}{x}$$

Funzioni di proporzionalità

Riprendiamo il concetto di grandezze direttamente proporzionali con un esempio: il lato di un triangolo equilatero e il suo perimetro.

Lato di un triangolo equilatero in cm (x)	Perimetro del triangolo in cm (y)
2	6
4	12
6	18
8	24

Possiamo dire che:

a) La funzione $y = f(x)$ si può esprimere con la formula $y = 3x$, quindi è una **funzione matematica**;

b) Il numero 3 rappresenta il rapporto costante tra le due grandezze e si chiama **coefficiente di proporzionalità diretta**;

c) La funzione $y = 3x$ stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i valori della **variabile indipendente** x e i valori della **variabile dipendente** y.

Funzioni di proporzionalità

in sintesi

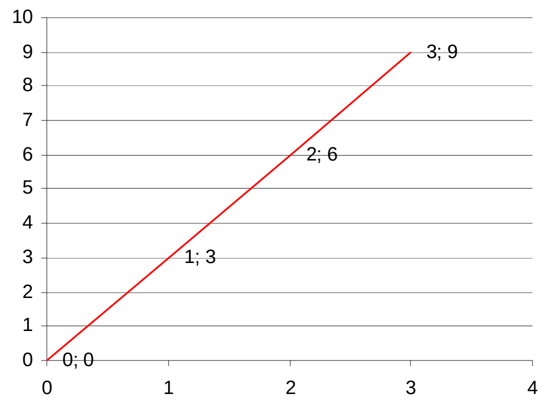
I valori di due grandezze direttamente proporzionali sono in **corrispondenza biunivoca** fra loro; questa corrispondenza si chiama **proporzionalità diretta**.

La funzione matematica relativa è data dal rapporto costante di due valori qualsiasi: **y = kx** e si chiama **funzione della proporzionalità diretta**.

Il coefficiente **k** si chiama **coefficiente di proporzionalità diretta**.

Rappresentiamo graficamente sul piano cartesiano tale funzione: $y = 3x$

X	0	1	2	3
y	0	3	6	9



Ogni funzione matematica del tipo y = kx è una funzione che esprime la **legge di proporzionalità diretta** e il suo diagramma cartesiano è una **semiretta** uscente dall'origine degli assi cartesiani.

Funzioni di proporzionalità

Riprendiamo il concetto di grandezze inversamente proporzionali con un esempio: il numero di operai addetti a un lavoro e il tempo impiegato per fare quel lavoro.

Numero di operai addetti a un lavoro (x)	**Tempo impiegato per quel lavoro in ore (y)**
2	18
4	9
6	6
8	4,5

Possiamo dire che:

a) La funzione y = f(x) si può esprimere con la formula: $y = \frac{36}{x}$

b) il numero 36 rappresenta il prodotto costante tra le due grandezze e si chiama coefficiente di proporzionalità inversa;

c) La funzione $y = \frac{36}{x}$ stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i valori della variabile indipendente x e il valore della variabile dipendente y.

Funzioni di proporzionalità

in sintesi

I valori di due grandezze inversamente proporzionali sono in corrispondenza biunivoca fra loro; questa corrispondenza biunivoca si chiama **proporzionalità inversa**.

La funzione matematica è data dal prodotto costante di due valori qualsiasi:

$$xy = h \qquad oppure \qquad y = \frac{h}{x}$$

e si chiama **funzione della proporzionalità inversa**.

Il coefficiente h si dice **coefficiente di proporzionalità inversa**.

Fine