

MATEMATICA FINANZIARIA

1) La **matematica finanziaria** si occupa delle operazioni finanziarie.

Per operazione finanziaria si intende quella operazione nella quale avviene uno scambio di capitali, intesi come somme di denaro, riferiti a epoche diverse.

Esistono 2 tipi di operazioni finanziarie:

- operazioni finanziarie semplici: che risultano dallo scambio tra 1 sola prestazione e una sola controprestazione
- operazioni finanziarie complesse: che risultano dallo scambio tra 1 sola prestazione e più controprestazioni o viceversa; anche il leasing, il rimborso di un debito, la costituzione di un capitale sono operazioni complesse.

2) Tutte le operazioni finanziarie sono sempre legate al fattore tempo.

Il tempo si può rappresentare graficamente mediante una retta orientata, detta asse dei tempi, nella quale il verso della retta indica il trascorrere del tempo;

l'origine rappresenta l'istante in cui si incomincia a contare il tempo;

l'unità di misura è l'unità di tempo prescelta (anno, semestre, mese....)



3) Il **capitale iniziale C** è il valore del capitale impiegato all'inizio dell'operazione finanziaria, cioè il capitale che frutterà un certo interesse

4) L'**interesse I** è il compenso che spetta a chi presta un certo capitale C per un tempo t, ad un certo tasso di interesse.

5) Si chiama **tasso di interesse unitario annuo**, e si indica con **i**, l'interesse prodotto in 1 anno dal capitale unitario di 1 €.

6) Si chiama **tasso di interesse percentuale annuo**, e si indica con **r**, l'interesse prodotto in 1 anno dal capitale di 100 €.

7) Si chiama **montante o valore finale M**, il valore del capitale C al quale è stato aggiunto l'interesse I. → $M = C + I$

REGIMI DI CAPITALIZZAZIONE

Ogni volta che si calcola un montante, si sta eseguendo un procedimento detto **capitalizzazione**.

Esistono due regimi di capitalizzazione:

- a) capitalizzazione semplice, in cui l'interesse non è fruttifero, perché è solo il capitale iniziale a fruttare;
- b) capitalizzazione composta, in cui l'interesse è fruttifero, perché alla fine di ogni periodo, si aggiunge al capitale iniziale e produce a sua volta, un interesse nei periodi successivi.

CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

Nella capitalizzazione semplice, l'interesse I è direttamente proporzionale al capitale C, al tasso i, al tempo t. Pertanto si calcola con la formula: $I = Cit$ (si utilizza quando il tasso è annuo e il tempo è espresso in anni)

- Se il tempo è in anni e mesi → $I = \frac{Cit}{12}$

- Se il tempo è in anni, mesi e giorni → $I = \frac{Cit}{360}$ (si intende anno commerciale di 360 giorni)

Se il tasso non è annuo, ma riferito ad una frazione di anno (tasso semestrale i_2 ; tasso quadrimestrale i_3 , tasso trimestrale i_4 , tasso bimestrale i_6 , tasso mensile i_{12}), anche il tempo andrà riferito nella stessa unità di misura del tasso.

Esempio 1) Calcolare l'interesse prodotto da 500 € impiegati per 2 anni e 6 mesi al tasso trimestrale $i_4 = 0,03$
 $t = 2 \times 12 + 6 = 30$ mesi , poiché il tasso è trimestrale e in un trimestre ci sono 3 mesi →

$$t = \frac{30}{3} \rightarrow I = 500 \times 0,03 \times \frac{30}{3} = 150 \text{ €}$$

PROBLEMI INVERSI DELLA CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE (NOTO I)

Dalla formula $I = Cit$, si possono ricavare le formule inverse che permettono di calcolare C,i, t , quando sono noti gli altri 3 elementi.

$$C = \frac{I}{it} ; \quad i = \frac{I}{Ct} ; \quad t = \frac{I}{Ci}$$

MONTANTE SEMPLICE

Il montante come sappiamo è la somma del capitale iniziale C con l'interesse I maturato al termine dell'operazione , cioè al tempo t.

Quindi conoscendo C e I → $M = C + I$.

Se non si conosce I e non serve calcolarlo , il montante M va calcolato con la formula :

$$M = C + Cit \rightarrow \mathbf{M = C (1 + it)}$$

Il fattore $(1 + it)$ è detto fattore di capitalizzazione semplice , perché esso rappresenta il montante nel regime di capitalizzazione semplice , di 1 euro al tasso i e per il tempo t.

PROBLEMI INVERSI DELLA CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE (NOTO M)

$$C = \frac{M}{(1 + it)} ; \quad i = \frac{M - C}{Ct} ; \quad t = \frac{M - C}{Ci}$$

GRAFICI di I e di M

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale , I e M si possono rappresentare graficamente come 2 funzioni lineari .

Posto $t = x$; $I = y$

da $I = Cit \rightarrow y = Ci \cdot x$ considerando Ci come costante , si nota che $y = Ci \cdot x$ è l'equazione di una retta uscente dall'origine .

Invece da $M = C + Cit$, posto $M = y$ e $t = x \rightarrow y = Ci \cdot x + C$ è l'equazione di una retta parallela alla precedente , ma uscente da un punto su asse y di coordinate $(0; C)$

CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

Si parla di regime di capitalizzazione composta , quando il tempo di impiego di un capitale è suddiviso in più periodi e, alla fine di ognuno di essi , l'interesse semplice, prodotto dal capitale esistente all'inizio del periodo si aggiunge al capitale e , insieme ad esso , produce interesse nei periodi successivi.

La capitalizzazione composta si dice :

- annua , se il periodo di capitalizzazione è l'anno e il tasso è annuo i ;
- frazionata , se il periodo di capitalizzazione è un sottomultiplo dell'anno (trimestre , semestre , quadrimestre , bimestre , mese)

Il montante composto di un capitale C, al tasso annuo i , impiegato per n anni , si calcola con la formula :

$\mathbf{M = C (1 + i)^n}$, il fattore $(1 + i)^n$ è detto fattore di capitalizzazione composta o di montante composto , perché moltiplicato per C , mi dà il valore del montante composto.

➤ Quando il tempo non è un numero intero di anni, ma anni, mesi e giorni, per calcolare il montante composto esistono 2 convenzioni:

- a) Convenzione esponenziale: $M = C (1 + i)^{a + m/12 + g/360}$
 b) Convenzione lineare o mista: $M = C (1 + i)^n \cdot (1 + i \cdot t)$ ove $n =$ numero anni e $t = \frac{m}{12} + \frac{g}{360}$

PROBLEMI INVERSI DELLA CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

Tre sono i problemi inversi che si presentano nella capitalizzazione composta:

- a) Calcolo del Capitale C $\rightarrow C = \frac{M}{(1+i)^n}$
 b) Calcolo del tasso annuo i $\rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1$
 c) Calcolo del tempo n $\rightarrow n = \frac{\text{Log}(\frac{M}{C})}{\text{Log}(1+i)}$

CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA FRAZIONATA

Quando nel calcolo del montante composto la capitalizzazione degli interessi non è annua, ma avviene in periodi di tempo inferiori all'anno, perché il tasso non è più annuo, ma è relativo ad 1/k di anno (per esempio tasso semestrale, trimestrale ecc), si parla di MONTANTE COMPOSTO FRAZIONATO.

- Se il tasso è semestrale, si indica con i_2 e il tempo va espresso come frazione di semestre

Es $n = 2^a 3^m 10^g \rightarrow n = \frac{2 \times 360 + 3 \times 30 + 10}{180}$, si mette 180 perché in 1 semestre ci sono 180 giorni

- Se il tasso è trimestrale, si indica con i_4 e il tempo va espresso come frazione di trimestre

Es $n = 4^a 5^m \rightarrow n = \frac{4 \times 12 + 5}{3}$, si mette 3 perché in 1 trimestre ci sono 3 mesi

Tasso semestrale	Tasso trimestrale	Tasso quadrimestrale	Tasso bimestrale	Tasso mensile
i_2	i_4	i_3	i_6	i_{12}

Per il resto valgono le stesse formule dirette ed inverse viste per la capitalizzazione composta.

REGIMI DI SCONTO

Def. Si definisce **Sconto**, il compenso che spetta a chi paga anticipatamente un certo capitale C .

Def. Si definisce **Somma Scontata o Valore Attuale** di un capitale C esigibile tra n -periodi, il capitale esigibile subito V .

Def. Si definisce **Valore Nominale** C , il capitale che dovrebbe essere pagato alla scadenza n .

Def. In generale lo **sconto** è la differenza tra valore nominale e somma scontata. $\rightarrow S = C - V$

Accanto ad ogni regime di capitalizzazione esiste un regime di sconto.

SCONTO RAZIONALE SEMPLICE

È il regime di sconto secondo il quale lo **sconto razionale** di un capitale di **valore nominale** C , si calcola

con la formula: $S_{\text{raz}} = \frac{Cit}{(1+it)}$

Oppure, se è nota la somma scontata V , lo sconto razionale si può calcolare così: $S_{\text{raz}} = V \cdot i \cdot t$

Mentre la somma scontata si ottiene in due modi:

a) $V = C - S_{\text{raz}}$ (se sono noti valore nominale e sconto razionale)

b) $V = \frac{C}{(1+it)}$ (se sono noti il valore nominale, il tasso e il tempo)

SCONTO COMPOSTO

È il regime di sconto secondo il quale lo **sconto composto** di un capitale di **valore nominale** C , si calcola

con la formula $S_c = \frac{C}{[1 - (1+i)^{-n}]}$

Mentre il valore attuale o somma scontata V , si trova con la stessa formula inversa utilizzata per calcolare il

capitale nella capitalizzazione composta, ovvero: $V = \frac{C}{(1+i)^n}$

Il fattore $\frac{1}{(1+i)^n}$ si chiama **fattore di sconto composto**, perché mi permette di trovare la somma scontata

V , noto il valore nominale del capitale.

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA FINANZIARIA

Per poter confrontare, sommare, sottrarre dei capitali scadenti in epoche diverse, occorre riferirli alla stessa scadenza, portandoli "avanti" o "indietro" sull'asse dei tempi.

"Portare avanti" su asse dei tempi un capitale C , significa capitalizzarlo, ovvero calcolarne il montante mediante la capitalizzazione semplice o quella composta.

➤ Per ottenere il montante semplice si utilizza la formula $M = C(1+it)$

➤ Per ottenere il montante composto si utilizza la formula $M = C(1+i)^n$

"Portare indietro" su asse dei tempi un capitale, significa scontarlo, ovvero calcolarne il valore attuale o somma scontata mediante i regimi di sconto semplice o composto.

➤ Per ottenere il valore attuale con sconto semplice si usa la formula $V = \frac{C}{(1+it)}$

➤ Per ottenere il valore attuale con sconto composto si usa la formula $V = \frac{C}{(1+i)^n}$