Studio di funzione (irrazionale fratta)
Per rappresentare graficamente una funzione reale si devono seguire i seguenti passi:

1. Ricerca del campo di esistenza o dominio della funzione;
2. Stabilire se la funzione è periodica e/o simmetrica;;
3. Ricerca delle eventuali intersezioni con gli assi;
4. Studio del segno della funzione;
5. Ricerca dei limiti della funzione agli estremi del dominio;
6. Ricerca degli eventuali asintoti;
7. Ricerca delle eventuali intersezioni con gli asintoti;
8. Ricerca degli intervalli di crescenza e decrescenza della curva;
9. Ricerca di eventuali punti di massimo o di minimo relativi;
10. Ricerca di concavità e convessità della curva;
11. Ricerca degli eventuali punti di flesso per la curva;
12. Rappresentazione grafica della funzione.

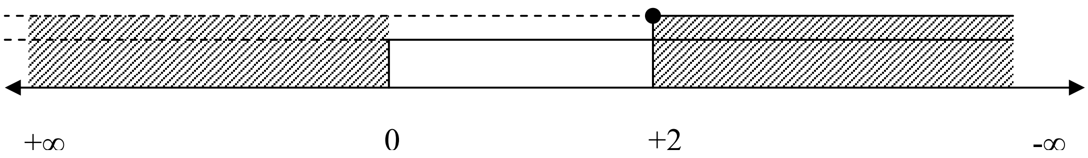
ESEMPIO

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}$$

1 Ricerca del C.E. della funzione

C.E. = $\left\{x \in R : \frac{x^3-8}{x} \geq 0\right\}$

$\frac{x^3-8}{x} \geq 0$ disequazione fratta : $\begin{matrix} N \\ D \end{matrix}\left\{\begin{matrix} x^3-8 \geq 0 \\ x > 0 \end{matrix}\right\}$



C:E: $x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left[2;+\infty\right[$

2 Stabilire se la funzione è periodica e/o simmetrica
Una funzione si dice periodica di periodo T se è verificata la seguente condizione f(x + k T)=f(x) con k appartenente all'insieme dei numeri interi relativi . In tal caso basta studiare la funzione in un intervallo di periodicità in quanto negli altri intervalli si comporta allo stesso modo.
La nostra funzione non è periodica infatti :

$$f(x+k\cdot T)=\sqrt{\frac{(x+kT)^3-8}{x+kT}} \neq f(x)$$

Ricerca di eventuali simmetrie
Una funzione è simmetrica rispetto all'asse y se si verifica la seguente condizione:
$f(-x)=f(x)$
Una funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi se si verifica la seguente condizione:
$f(-x)=-f(x)$
Essendo :

$$f(-x)=\sqrt{\frac{(-x)^3-8}{-x}}=\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} \neq \pm f(x)$$

la funzione non è simmetrica ne rispetto all'asse y ne rispetto all'origine.

3 Intersezioni con gli assi :

$$\begin{cases} y=0 \\ x^3-8=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases}$$ interseca l'asse x nel punto P(2;0)

4 Studio del segno di f(x) :

$$\sqrt{\frac{x^3-8}{x}} \geq 0$$

Essendo una radice di indice pari è sempre positiva nel C.E.
Quindi la funzione è positiva negli intervalli $x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left[2;+\infty\right[$ Negli altri intervalli non esiste.

5 e 6 Ricerca dei limiti della funzione, agli estremi del dominio, e degli eventuali asintoti

Dobbiamo calcolare i limiti in -∞ , +∞, 0 da destra

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3-8}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3-8}{x}} = +\infty$$

la funzione non ammette asintoti orizzontali, ma potrebbe avere gli asintoti obliqui :

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3-8}{x^3}} = \sqrt{1} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3-8}{x}} - 1x \right) = (+\infty - \infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-8}{x} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-8}{x}} + x} = 0$$

la retta $y = x$ è asintoto obliquo a destra

Nel calcolo del secondo limite per eliminare l'indeterminazione derivante dalla forma +∞ -∞

moltiplichiamo per $$\frac{\sqrt{\frac{x^3-8}{x}} + x}{\sqrt{\frac{x^3-8}{x}} + x}$$.

Quando facciamo il limite per x che tende a -∞ essendo il valore dell'incognita x negativo nel portarlo dentro la radice dobbiamo lasciare fuori -1 quindi :

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}}{-(-x)} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^3-8}{x^3}} = -\sqrt{1} = -1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3-8}{x}} + 1x \right) = (+\infty - \infty) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3-8}{x} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-8}{x}} - x} = 0$$

la retta $y = -x$ è asintoto obliquo a sinistra

$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}=0$ **la retta $x=0$ è asintoto verticale**

7 Ricerca delle eventuali intersezioni con gli asintoti obliqui

Per trovare le intersezioni con gli asintoti obliqui bisogna risolvere i sistemi composti dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} y=\sqrt{\dfrac{x^3-8}{x}} \\ y=x \end{cases}$$

la cui equazione risolvente è $\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}=x \Rightarrow \frac{x^3-8}{x}=x^2 \Rightarrow x^3-8=x^3 \Rightarrow -8=0$ IMPOSSIBILE

e

$$\begin{cases} y=\sqrt{\dfrac{x^3-8}{x}} \\ y=-x \end{cases}$$

la cui equazione risolvente è $\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}=-x \Rightarrow \frac{x^3-8}{x}=x^2 \Rightarrow x^3-8=x^3 \Rightarrow -8=0$ IMPOSSIBILE

Non interseca l'asintoto obliquo.

8 Ricerca degli intervalli di crescenza o decrescenza della curva

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}\right)=\frac{\dfrac{3x^3-\left(x^3-8\right)}{x^2}}{2\left(\dfrac{x^3-8}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(x^3+4\right)}{x^2\sqrt{x^3-8/x}}$$

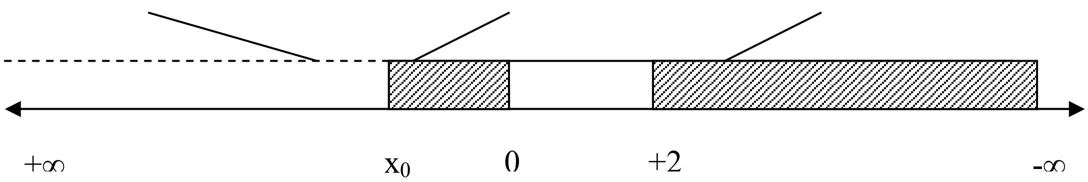
$f'(x)\geq 0$ se $x^3-4\geq 0$ quindi se $x\geq -\sqrt[3]{4}$

Quindi considerando il dominio della funzione possiamo concludere che :

$f'(x)>0$ e quindi la funzione e crescente in $\left]-\sqrt[3]{4};0\right[\cup\left[2;+\infty\right[$

$f'(x)<0$ e quindi la funzione e decrescente in $\left]-\infty;-\sqrt[3]{4}\right[$

$f'(x)=0$ e quindi la funzione ammette un punto stazionario in $x_0=-\sqrt[3]{4}$



Quindi nel punto $x_0=-\sqrt[3]{4}$ la curva ammette un punto di minimo relativo :

essendo $f(x_0)\cong 2.75$ il punto di minimo approssimativamente è : $m\left(-\sqrt[3]{4};2.75\right)$

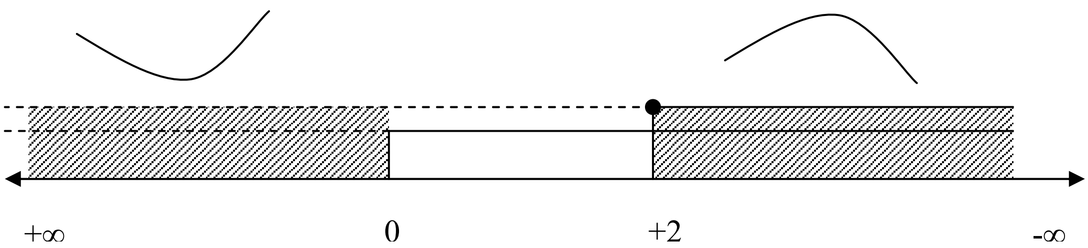
9 Ricerca degli intervalli di convessità e concavità per la curva

Calcoliamo la derivata seconda :

essendo $f'(x) = \dfrac{\left(x^3+4\right)}{x^2\sqrt{x^3-8\big/x}}$

$f''(x) = ... = -\dfrac{24\left(x^3-2\right)}{x^4\sqrt{\left(\dfrac{x^3-8}{x}\right)^3}}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$ punto che non cade nel dominio di f(x). Pertanto la funzione non presenta punti di flesso reali.
Studiamo il segno della derivata seconda
$f''(x) \geq 0$
Per risolvere questa disequazione basta osservare che il denominatore è sempre positivo nel C.E. infatti :
$\dfrac{x^3-8}{x} \geq 0$ per il CE quindi $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{2}$ di conseguenza tenendo conto del C.E. abbiamo



Per completare calcoliamo il limite di *f'(x)* in 0 e 2 :

$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\left(x^3+4\right)}{x^2\sqrt{\left(x^3-8\right)\big/x}} = \infty$

$\lim_{x\to 2^+} \dfrac{\left(x^3+4\right)}{x^2\sqrt{\left(x^3-8\right)\big/x}} = \infty$

La funzione non è derivabile nei punti di ascissa x=0 e x=2. In tali punti le tangenti alla curva si dispongono in modo parallelo all'asse y delle ordinate.

12 Rappresentazione grafica della funzione