Costruzione del discriminante o Δ (*)

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+bx=-c$$

Moltiplico ambo i membri x $4a$ $\Rightarrow$

$$4a^2x^2+4abx=-4ac$$

Notiamo che $4a^2x^2=(2ax)^2$

e che $4abx=2\cdot(2ax)\cdot b$

Per fare in modo che al 1° membro si abbia il quadrato di un binomio sommo b^2 ad ambo i membri $\Rightarrow$ $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac \Rightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Se le radici coincidono $\Delta=0$ e $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ 1° caso

2° caso

$$x_2=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

3° caso

$$=-\frac{b}{2a}\pm\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Rightarrow$$

Posto $\Delta=b^2-4ac$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{b}{2a}+\frac{\Delta}{4a^2}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ -\frac{b}{2a}-\frac{\Delta}{4a^2}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$$

Se $x_1=x_2$, abbiamo

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$-b+\sqrt{b^2-4ac}+b+\sqrt{b^2-4ac}=0$$

$$2\sqrt{b^2-4ac}=0$$

$\sqrt{b^2-4ac}=0$ ossia $\Delta=0$ con $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

Troviamo le coordinate di un vertice $\neq$ da $0;0$ ossia in un punto qualsiasi dello spazio!

Sostituiamo $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ in X, per trovare il corrispondente y

$\Downarrow$

Le Radici Coincidenti $\Rightarrow$

Se $y=ax^2+bx+c$

Ora se la traslazione d'assi porta da $O(0;0)$ in O' con $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ per trovare il corrispondente punto della y in $y=ax^2+bx+c$, sarà sufficiente risolvere in $f(x)\Rightarrow$

$$y=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}+b\cdot-\frac{b}{2a}+c=\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=$$

$=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a}$, che estrapolato dà: $\Rightarrow -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Quindi $y=-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, ossia $O'=\left(-\frac{b}{2a};-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\right)$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{soluzioni}$$

$$\sum x_1, x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Prodotto } x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{b^2 + \cancel{b\sqrt{b^2-4ac}} - \cancel{b\sqrt{b^2-4ac}} - (\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a^2}} = \frac{c}{a}$$

Ricapitolando: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2\right] =$$

$$= a\left[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\right] = a\left[x(x-x_1) - x_2(x-x_1)\right] =$$

$$= a(x-x_1)(x-x_2).$$

Ricapitolando: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ Per $a>0$

Inoltre se $\Delta = b^2-4ac = \emptyset \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow$ soluzioni o radici coincidenti.

ossia $\Rightarrow a(x-x_1)(x-x_1) \Rightarrow a(x-x_1)^2 \Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

Per $a>0$ e $\Delta<0$

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Poiché per ipotesi è $b^2-4ac<0$ si ottiene il prodotto del n° positivo o nullo $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ con il numero positivo $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ e dato che ho dato per supposto $a>0$ il polinomio ax^2+bx+c risulterà positivo x ogni valore della $x \Rightarrow$ PAG. 173 e 175 + pag. 9