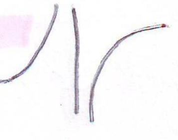
Si studi la $f(x) = y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ (algebrica razionale fratta) tipico irrazionale $\to \sqrt{2}$

L che può essere scritto come una frazione a/b con a e b interi e $b \neq 0$

Ricordando che asintoto deriva dal greco con a privativo = non e sympiptein = congiungersi possiamo dire che l'asintoto è una retta che si avvicina alla $f(x)$ senza mai toccarla_

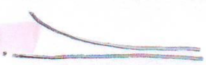
Per questo si dice che l'asintoto è la tangente all'infinito della funzione_

L'asintoto si avvicina alla $f(x)$ o verticalmente o orizzontalmente oppure in modo obliquo

A.V.  ; quando la x si avvicina ad un valore finito la $f(x) = y$ tende a ∞

Si cerca nei punti di discontinuità della $f(x)$

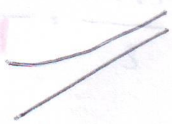
nei punti agli estremi del dominio di $f(x)$ se sono finiti $\Rightarrow$ Esiste se $+/- \infty$

A. Oriz.  ; quando la $x \to \infty$ la $y = f(x)$ si avvicina ad una retta orizzontale_ Esiste se (n) è finito_

Si cerca a $+/- \infty$ se il dominio lo consente

Si cerca a $+/- \infty$ se il dominio lo consente_

$y = mx + q \Rightarrow$ si cerca a $+/- \infty$ se il dominio lo consente_

A. obliquo  ; quando la $x \to \infty$ la $y = f(x) \to \infty$

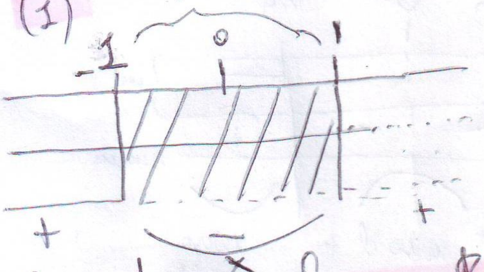
si cerca $q \Rightarrow \lim_{x \to +/- \infty} [f(x) - m(x)]$. Esiste se q e m sono finiti_

$m = \lim_{x \to +/-\infty} f(x) \cdot 1/x$, dove x m finito

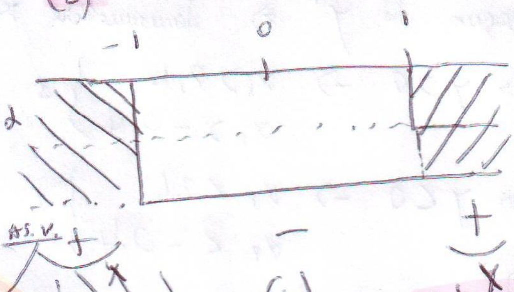
N.B. l'asintoto orizzontale esclude l'asintoto obliquo e viceversa perché al crescere della x la $f(x)$ può andare all'∞ in un solo modo!_

numeratore $\Rightarrow$ x sempre valida > 0 $\Longrightarrow$ per qualsiasi valore di x

denominatore $\Rightarrow$ 1) $\begin{cases} y > 0 \Rightarrow 1 - x^2 > 0 \to -x^2 > -1 \to x^2 < 1 \to x < 1,\ x < -1 & (<) \\ y < 0 \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \to -x^2 < -1 \to x^2 > 1 \to x > 1,\ x > -1 & (>) \end{cases}$ 2)

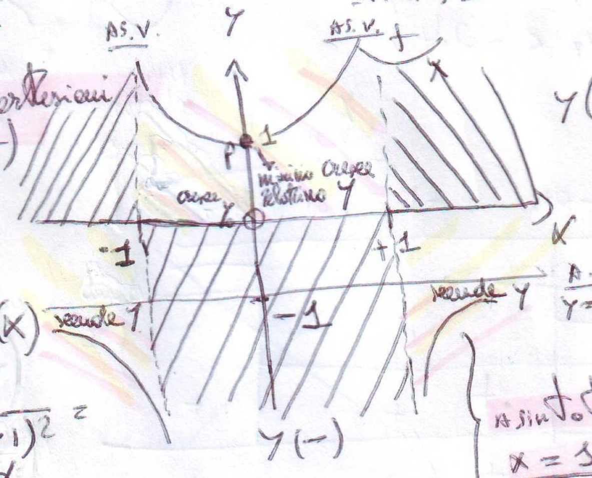
(1) 

$\underbrace{-1 \leq x \leq 1}_{y}$ e

(2) 

$\left.\begin{matrix} x < -1 \\ x > +1 \end{matrix}\right\} X$

Rappresentazione sugli assi cartesiani dello studio del segno $y(+)$



$y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

Intersezione con gli assi

$\begin{cases} \text{Per } x = 0 \quad y = 1 \quad P_1(0;1) \\ \text{Per } y = 0 \Rightarrow \text{impossibile} \\ n/\infty = 0;\ \infty/n = \infty;\ n/0 = \infty;\ \infty/0 = \infty \end{cases}$

Ricerca asintoti verticali $\Rightarrow (x)$ tende Y

1) $\lim_{x \to -1} y = \dfrac{n}{0} = \dfrac{1+(-1)^2}{1-(-1)^2} =$ (f. indeterminata $n/0$)

$= \dfrac{1+1}{1-1} = 2/0 = -\infty$ (Esiste)

2) $\lim_{x \to 1}$ di $n/x = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = \dfrac{2}{1-1} = 2/0 = +\infty \to$ (Esiste!)

Asintoti verticali esistenti in $\underline{x = 1}$ e $\underline{x = -1}$

Ricerca asintoto orizzontale! $\Rightarrow (y)$

3) $\lim_{x \to \pm\infty} y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = \dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}-1} = \left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) : \left(\dfrac{1}{x^2}-1\right) \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\infty}+1\right) / \left(\dfrac{1}{\infty}-1\right) = \dfrac{1}{-1} = -1$ $(y = -1)$ Esiste!

(con $\frac{1}{\infty} \to 0$)

L'esistenza dell'asintoto orizzontale esclude quello obliquo_

Facciamo comunque una prova:

$y = mx + q \Rightarrow$ Ricerca asintoto obliquo:

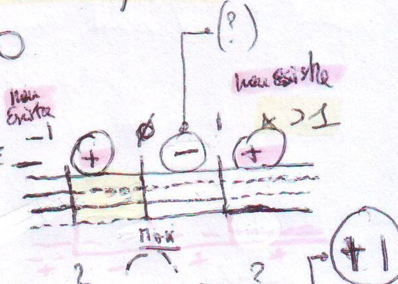
$m = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = \dfrac{1/x^2+1}{1/x^2-1} = -1$ con $q = \lim_{x \to +/-\infty} \left\{ \left(\dfrac{1/x^2+1}{1/x^2-1} \right) - 1x \right\} = -1 \cdot -\infty = -\infty$

L'asintoto obliquo come avevamo già anticipato, non esiste!

$$y' = \frac{f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)}{(\ (x))^2} = \frac{2x(1-x^2) + 2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{2x - \cancel{2x^3} + 2x + \cancel{2x^3}}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

<< STUDIO DEL SEGNO DELLA y' >>



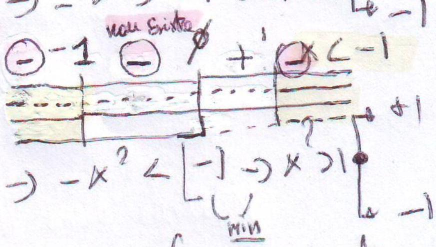
Determiniamo ora gli intervalli in cui la $f(x)$ cresce o decresce –

Per $f'(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{4x}{\underbrace{(1-x^2)^2}_{\text{sempre }(+)}} > 0 \left\{ \begin{array}{l} 4x > \emptyset \rightarrow x > 0 \rightarrow \\ (1-x^2)^2 > \emptyset \rightarrow \pm(1-x^2) > 0 \rightarrow -x^2 > -1 \rightarrow x^2 < 1 \\ E: x^2 - 1 > \emptyset \rightarrow x > \pm 1 \end{array} \right.$

(sempre (+) x $x \neq \pm 1$)

Per $f'(x) < 0 \Rightarrow \dfrac{4x}{\underbrace{(1-x^2)^2}_{\text{sempre }(+)}} < 0 \left\{ \begin{array}{l} 4x < 0 \rightarrow x < 0 \\ (1-x^2)^2 < 0 \rightarrow 1 - x^2 < 0 \rightarrow -x^2 < [-1] \rightarrow x > 1 \end{array} \right.$

(sempre (−) x $x \neq \pm 1$)



STUDIO della monotonia:

Tutto questo serve ad individuare le regioni di piano dove per $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ è crescente e quelle dove per $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ è decrescente $\Rightarrow$ studio del segno di $y' \Rightarrow$ per $y < 0$ la x decresce in -1 e per $y > 0$ la x cresce in $+1$ –

Dovendo crescere sull'asse positivo delle ordinate dove abbiamo trovato l'unico punto di intersezione con gli assi, ossia $P(0;1)$ se ne deduce che quest'ultimo debba essere un punto di minimo relativo $\Rightarrow$ verifico sostituendo i punti trovati con la $f'(x)$ in $f(x) \Rightarrow$

STUDIO DELLA CONCAVITÀ:

Si calcola y'' e la si pone > 0 risolvendo la seguente $f''(x) > 0$

Si individuano poi le regioni di piano dove $\left\{ \begin{array}{l} f''(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ è concava verso l'alto} \Rightarrow \cup (+) \\ f''(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ è concava verso il basso} \Rightarrow \cap (-) \end{array} \right.$

osservando il grafico della concavità si possono individuare i punti di flesso – essi vanno considerati solo se appartengono al dominio della $f(x)$ –

$$f''(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2} = \frac{4\cdot(1-x^2)^2 + (4x^3 - 4x)\cdot 4x}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{4(1-2x^2+x^4) + 16x^4 - 16x^2}{(1-x^2)^4} = \frac{4 - 16x^2 + 4x^4 + 16x^4 - 16x^2}{(1-2x^2+x^4)(1-2x^2+x^4)} = \frac{4 - 32x^2 + 20x^4}{1 - 4x^2 + 6x^4 - 4x^6 + x^8} \Rightarrow$$

oppure: $\dfrac{4\cdot(1-x^2)^2 + 16x\,(x^3 - 1)}{(1-x^2)^4}$

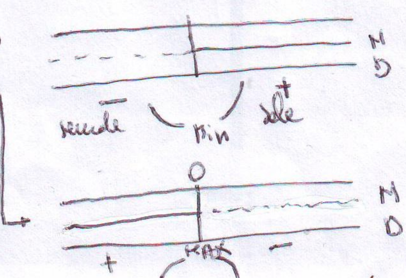
ALTRO svilupo di y'' ponendo $(1-x^2) = \lambda \Rightarrow \left(\dfrac{4x}{\lambda^2}\right)' = \dfrac{4\cdot\lambda^2 + 2\lambda\cdot 4x}{\lambda^4} = \dfrac{\cancel{\lambda}\cdot(4\lambda + 8x)}{\lambda^{\cancel{4}\,3}} =$

$$= \frac{4\cdot(1-x^2) + 8x}{(1-x^2)^3} = \frac{-4x^2 + 8x + 4}{(1-x^2)^3} \Rightarrow \begin{array}{l} > 0 \ (1) \\ < 0 \ (2) \end{array} \longrightarrow -4x^2 + 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64+64}}{-8} = \frac{-8 \pm 11{,}31}{-8} \begin{array}{l} 2{,}41 \\ -0{,}41 \end{array} \Big\} \text{ Punti di flesso} –$$

Riprendo lo studio del segno di $f'(x)$:

1) $(1-x^2)^2$ è sempre > 0 al denominatore e per $f'(x) > 0 \rightarrow x > 0 \Rightarrow$ ($y' > 0$)

2) $(1-x^2)^2$ " " > 0 " ", e per $f'(x) < 0 \rightarrow x < 0 \Rightarrow$ ($y' < 0$)



(1) Esiste solo il minimo relativo

(2) non Esiste il massimo relativo –

Riprendiamo più dettagliatamente la derivata seconda:

$$y'' = \frac{4 \cdot (1-x^2)^2 + 2(1-x^2) \cdot 4x}{(1-x^2)^4} = \emptyset$$

Alla ricerca di eventuali punti di flesso solo se appartengono al dominio della funzione.

$$\frac{4(1-x^2)\cancel{(1-x^2)} + 8x\cancel{(1-x^2)}}{(1-x^2)^{\cancel{4}\,3}} = 0$$

$$4(1-x^2) + 8x = 0$$

$$-4x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$4x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot -1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2{,}8}{2} = \begin{cases} \frac{4{,}8}{2} \\ -\frac{0{,}8}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2{,}4 & \text{non} \in (D) \\ x_2 = -0{,}4 & \in (D) \end{cases}$$

punto di flesso in $(0{,}4\,;\,0) \Rightarrow f_2$

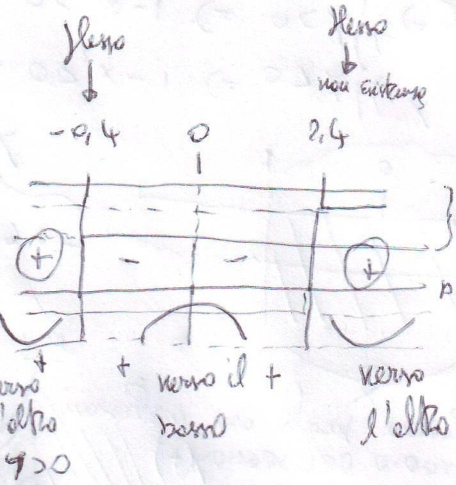
posizionato al di sotto però del campo di $\in y$ con minimo in (1)

$\Rightarrow$ Non esistono flessi.

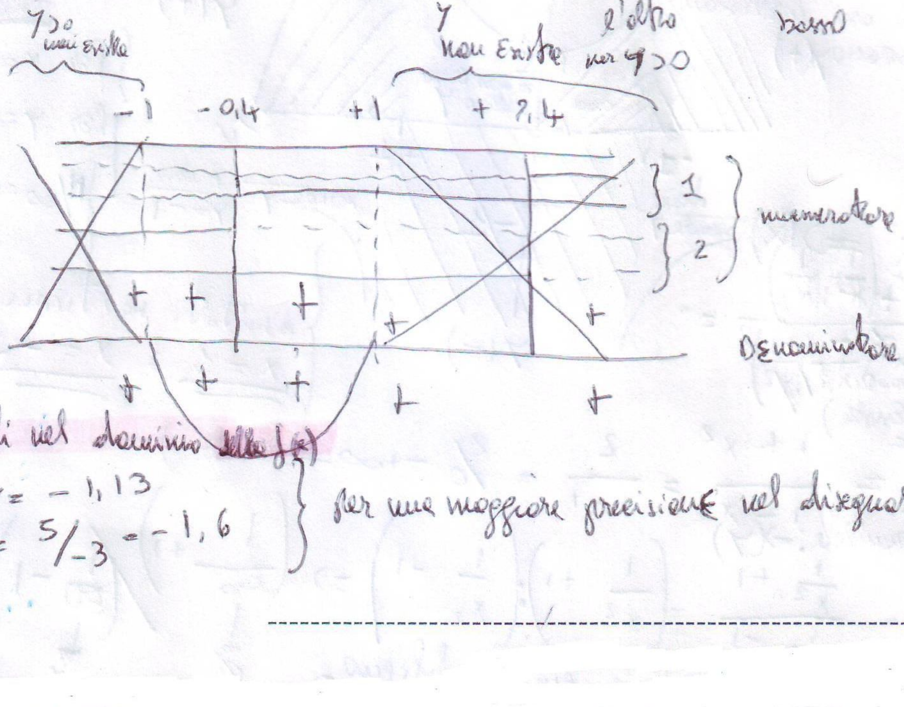
Studio del segno di y'' $\Rightarrow$ denominatore sempre > 0

numeratore per $y > 0 \to \left.\begin{matrix} x_1 > 2{,}4 \\ x_2 > -0{,}4 \end{matrix}\right\} 1$

per $y < 0 \to \left.\begin{matrix} x_1 < 2{,}4 \\ x_2 < -0{,}4 \end{matrix}\right\} 2$



Posto che
$$\begin{cases} \text{se } + \ \cup \\ \text{se } - \ \cap \end{cases}$$



Ricerca punti casuali nel dominio della f(x)

se $x = -4 \Rightarrow$ se $y = -1{,}13$

se $x = 2 \Rightarrow y = 5/{-3} = -1{,}6$

per una maggiore precisione nel disegnare la funzione.