DATI: $Y = \sqrt{K \cdot L}$ o $Y = \sqrt{KN}$ «SOLOW» 11/01/2015 COPYRIGHT BY FABRIZIOMAX

$n = \frac{\Delta N}{N} = 0{,}05$; $s = 0{,}2$ (SAGGIO DI RISPARMIO) ; $\delta = 0{,}15$ (TASSO DI AMMORTAMENTO)

TESTO: Consideriamo la seguente $f(x)$ della produzione: $Y = \sqrt{KN}$; supponendo che la popolazione cresca dello 0,05% annuo $\Rightarrow n = 0{,}05$ e il tasso di deprezzamento del capitale sia $\delta = 0{,}15$, calcolare:

1) I valori, in stato stazionario del REDDITO, dell'investimento e del consumo. Determinare il livello del capitale in unità di lavoro con la regola aurea.

$$Y = \sqrt{K \cdot L} \Rightarrow \underbrace{\frac{Y}{L} = \frac{\sqrt{K \cdot L}}{L}}_{} = \left(\frac{Y}{L}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{K \cdot L}}{L}\right)^2 = \frac{Y^2}{L^2} = \frac{K \cdot \cancel{L}}{L^{\cancel{2}}} = \frac{K}{L} \Rightarrow \frac{Y}{L} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}} = \sqrt{\frac{K}{L}}$$

La divido ambo i membri x L x ottenere la $f(x)$ intensiva della Cobb-Douglas di Solow

$f(x)$ di Solow che rapporta tutto al fattore lavoro.

Poste le seguenti:
$$\begin{cases} k_{minuscolo} = K/L \\ y_{minuscola} = Y/L \\ c_{minuscola} = C/L \\ i_{minuscola} = I/L \end{cases}$$, otterremo:

$$y_{minuscola} = \sqrt{k_{minuscola}}$$

$$y = \sqrt{k} = k^{1/2} = k^{0,5}$$

NB: Ricordando che δ = tasso di deprezzamento = tasso di ammortamento e che $\delta \cdot K$ = ammortamento del capitale $\Rightarrow 0{,}15 = 15\% \Rightarrow$ anni $= \frac{100}{15} = 6{,}6$ anni di ammortamento

Iniziamo col calcolare K stazionario, ossia quel capitale la cui variazione è data dalla differenza tra investimenti in nuovo capitale (ossia in capitali nuovi) e quello già presente $\Rightarrow$ $\Delta K = I - \delta K$ che possiamo anche scrivere come $\Delta K = s f(k^*) - \delta k^* \Rightarrow$ Inoltre poiché nel problema si considera un incremento della popolazione la nostra equazione diventa più complessa: $\Delta k = s f(k^*) - (\delta + n_{minuscolo}) \cdot k^*$. Ora, poiché in equilibrio di stato stazionario K GOLD = $k^{(*)}$ non varia è ovvio che ΔK non potrà subire variazioni, ossia $\Delta K = \emptyset$. Da questo scaturiscono le seguenti:

(Che pongo a sistema) $\Rightarrow$
1) $0 = s f(k^*) - \delta k^* \Rightarrow \underset{L(RO)}{\delta k^*} = s f(k^*) \Rightarrow \frac{k^*}{f(k)^*} = \frac{s}{\delta(ro)} \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{k}} = \frac{0{,}2}{0{,}15}$
2) $0 = I - \delta(k^*) \Rightarrow I = \delta(k^*)$, e considerando l'incremento della popolazione $\Rightarrow I = \delta(k^* + n) \Rightarrow I = 0{,}15(k^* + 0{,}05)$.

$$\begin{cases} \frac{k}{\sqrt{k}} = 1{,}\bar{3} \Rightarrow \frac{k^{\cancel{2}}}{\cancel{k}} = 1{,}\bar{7} \Rightarrow k = 1{,}\bar{7} \\ I = 0{,}15(1{,}\bar{7} + 0{,}05) = 0{,}27 \end{cases}$$

; adesso possiamo trovare anche $y = \sqrt{k} = \sqrt{1{,}\bar{7}} = 1{,}\bar{3}$

Possiamo ora ricavare da $Y = C + I$ il consumo come $C = Y - I = 1{,}\bar{3} - 0{,}27 = 1{,}06$

o ancora come: $C = (1 - s) \cdot Y = (1 - 0{,}2) \cdot 1{,}\bar{3} = 0{,}8 \cdot 1{,}\bar{3} = 1{,}06$

Nello stato stazionario l'ammortamento = all'investimento e lo stock di (K) cessa di crescere!

2) Determinare il livello del prodotto marginale del capitale supponendo che K x unità di lavoro sia 0,5. Normalmente il PMK nello golden rule dello stato stazionario è pari a δ, ossia $f(k)$ ha lo stesso (m) coefficiente angolare di $Y = \delta K$ (della retta dell'ammortamento). Dovendo in questo caso considerare anche la crescita della popolazione, avremo: $Y = (\delta + n) \cdot K$ oppure, il che è lo stesso: $Y' = f'(k) = (\delta K)' = \delta \Rightarrow MPK = \delta$ o $MPK = \underline{\delta + n} \Rightarrow$ Il consumo è massimo quando la produttività marginale eguaglia il tasso di ammortamento + il tasso di crescita della popolazione. Confrontiamo MPK con lo stock di capitale x unità di lavoro, ossia 0,5

$$\begin{cases} MPK = 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}35 \\ Y = K^{1/2} \Rightarrow Y' = 1/2 \cdot K^{1/2 - 1} = \frac{1}{2\sqrt{K}} = 0{,}\cancel{77} \end{cases} \Rightarrow K > \delta \ (0{,}5 > 0{,}15)$$

Il suo aumento abbassa i consumi.