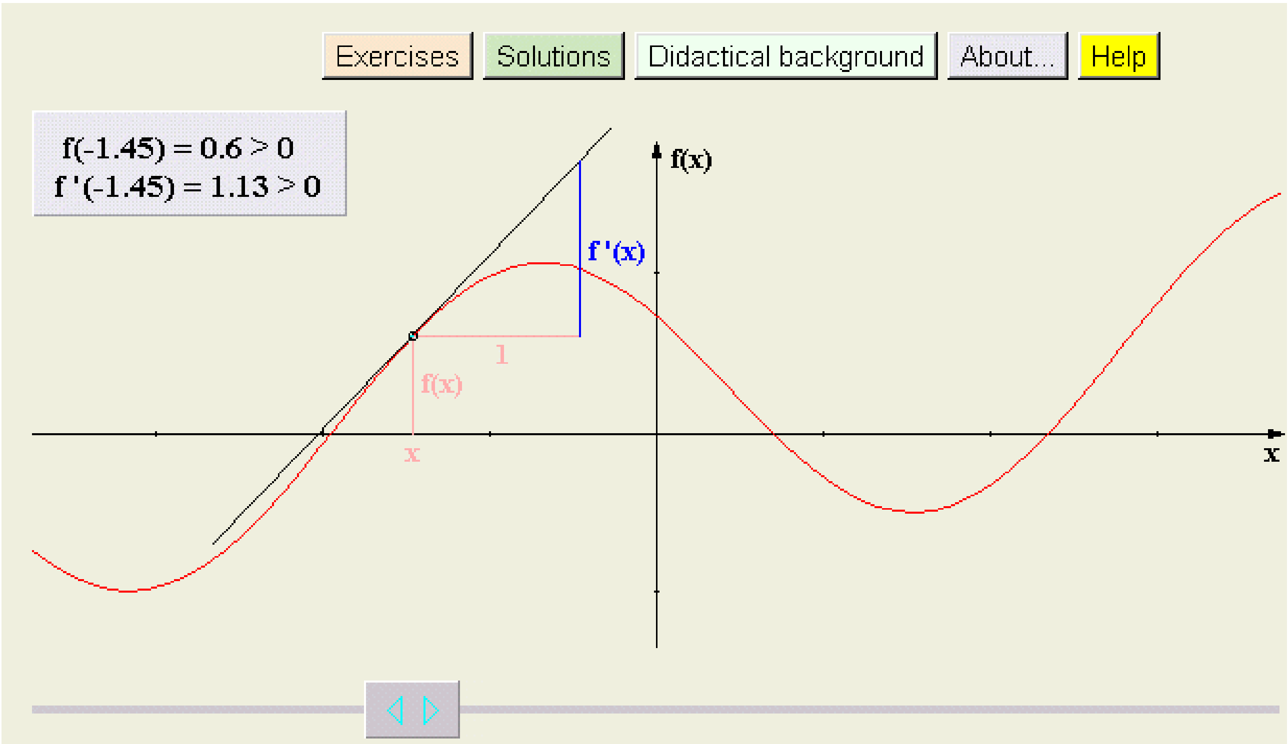
By Fabriziomax

Storia del concetto di derivata:



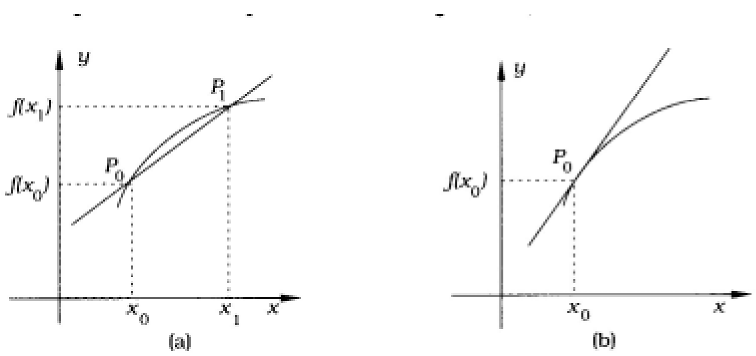
Introduzione: La derivata fu inventata da Newton per risolvere il problema pratico di come definire una velocita' e un'accelerazione istantanea a partire dai dati del tempo e delle distanze percorse.

Cosa succede: La velocita' istantanea di un corpo viene definita come ds/dt cioe' la derivata dello spazio percorso (s) rispetto al tempo(t). Se immaginate la funzione f come una rappresentazione di s(t) (l'andamento dello spazio percorso rispetto al tempo) allora potete constatare come la derivata sia anch'essa una funzione che possiamo calcolare punto per punto disegnando la tangente a f nel punto.

Definizione di derivata:

Sia y = *f(x)* una funzione continua. Fissato un punto xo appartenente all.insieme di definizione della funzione y = *f(x)*,sia *Po* = (x0; f(xo)) il punto di ascissa xo appartenente al grafico della funzione. Considerato un ulteriore punto x1, sempre appartenente all'insieme di definizione della funzione y = *f(x),* sia P1 = (x1; f(x1)) il punto di ascissa x1 appartenente allo stesso grafico. I due punti *P0, P1* individuano una retta *secante* al grafico.

Fermo restando il punto xo, immaginiamo ora di ripetere la costruzione, scegliendo x1 via via più vicino ad xo. Al tendere di x1 ad x0 (sia da destra che da sinistra) la retta secante tende in generale ad assumere una posizione limite t, che prende il nome di retta *tangente* al grafico nel suo punto *P0* .



Il coefficiente angolare della retta secante è: f(x1)-f(x2)/(x1-x0)

che assume la forma di rapporto incrementale Dx/Dy.
Se si pone, Dx = x1 - xo (incremento della variabile x)
e
Dy = f(x1) - f(x0) (incremento della variabile y corrispondente all'incremento x della variabile x).
Passando al limite quando x1 tende a x0, si ottiene il coefficiente angolare della retta tangente t:

lim f(x1)-f(x0)/(x1-x0)=lim Dy/Dx

x'→x° Dx→0

Questo numero chiamasi la derivata della funzione y = f(x) nel punto x0 e si denoterà con f'(x0).
Una funzione f(x) si dice derivabile se ammette derivata in ogni punto del suo insieme di definizione.
Le funzioni polinomiali, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche sono tutte funzioni derivabili.

Definizione di derivata calcolata in un punto

La funzione derivata
Sia]a; b[un intervallo aperto, e sia f :]a; b[! IR. Se la funzione f _e derivabile in]a; b[possiamo considerare la funzione che ad ogni x0 di]a; b[associa la derivata di f in x0. Tale funzione viene detta funzione derivata di f.
Tale funzione viene più spesso indicata con f 0(x). Si ha cioè, per ogni x di]a,b[:
f0(x) = lim f(x + h) - f(x)
h→0 ---------------------;
h
Prendiamo ad esempio la funzione: 7x^2+2x-6 da derivare nel punto Xo= 1

f'(x) = lim h->0 [(7(x+h)^2 + 2 (x+h) -6) - (7x^2 +2x - 6)] / h =

lim h->0 [7x^2 + 7h^2 +14xh +2x + 2h - 6 -7x^2 -2x + 6] / h =

lim h->0 [7h^2 + 14xh + 2h] /h =

lim h ->0 h(7h + 14x + 2) / h =

lim h ->0 7h + 14x + 2 = 14x + 2

che calcolata in x = 1 fa 16

Analogamente a: y'=14x+2, poi sostituisco 1 ad x, 14 + 2 = 16

MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE:

Cosa dobbiamo fare praticamente per trovare i punti candidati ad essere massimi e minimi relativi per una funzione derivabile y=f(x)?

1. Calcoliamo la derivata prima y=f '(x);

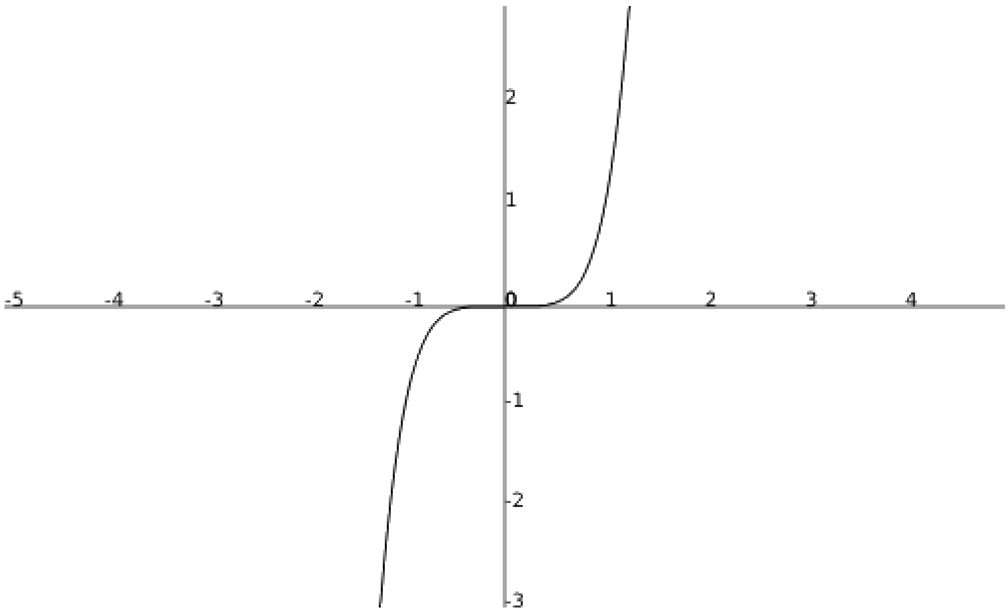
2. Risolviamo l'equazione f '(x)=0.

Le soluzioni x1,...,xn di questa equazione sono i candidati al ruolo di punti estremanti relativi che cercavamo. Questo significa che i punti di massimo e minimo relativo vanno cercati tra questi punti, ma non è detto che tutti questi punti siano effettivamente massimi e minimi relativi.

Detto in modo più elegante: l'annullarsi della derivata prima in un punto **è condizione necessaria** per avere un massimo o un minimo relativo, ma **non è condizione sufficiente**.

Es. y=4x^4

da cui otteniamo come soluzione x=0, ma il punto x=0 non è né massimo né minimo per questa funzione che è strettamente crescente su tutto l'asse delle y come da relativo grafico:



Cosa ci dà la sicurezza che un punto x0 tale che f '(x0)=0, sia effettivamente un punto di massimo o minimo? Dobbiamo studiare il comportamento della funzione in un intorno sinistro e in un intorno destro di x0 e vedere se essa è crescente o decrescente. Facciamo questo studio usando le derivate.

Non ci rimane che studiare il segno della derivata prima y=f ' (x) e vedere su quali parti del dominio è >0, ≥0, <0, ≤0. In definitiva indichiamo con x0 un punto del dominio su cui la derivata prima si annulla, e studiamo il segno della derivata sugli intervalli [a,x0) e (x0,b]. Se

F'(x)<0 per x elemento di (a,x°)

F'(x)=0

F'(x)>0 per x elemento di (x°,b)

Allora x0 è un punto di minimo relativo per y=f(x).

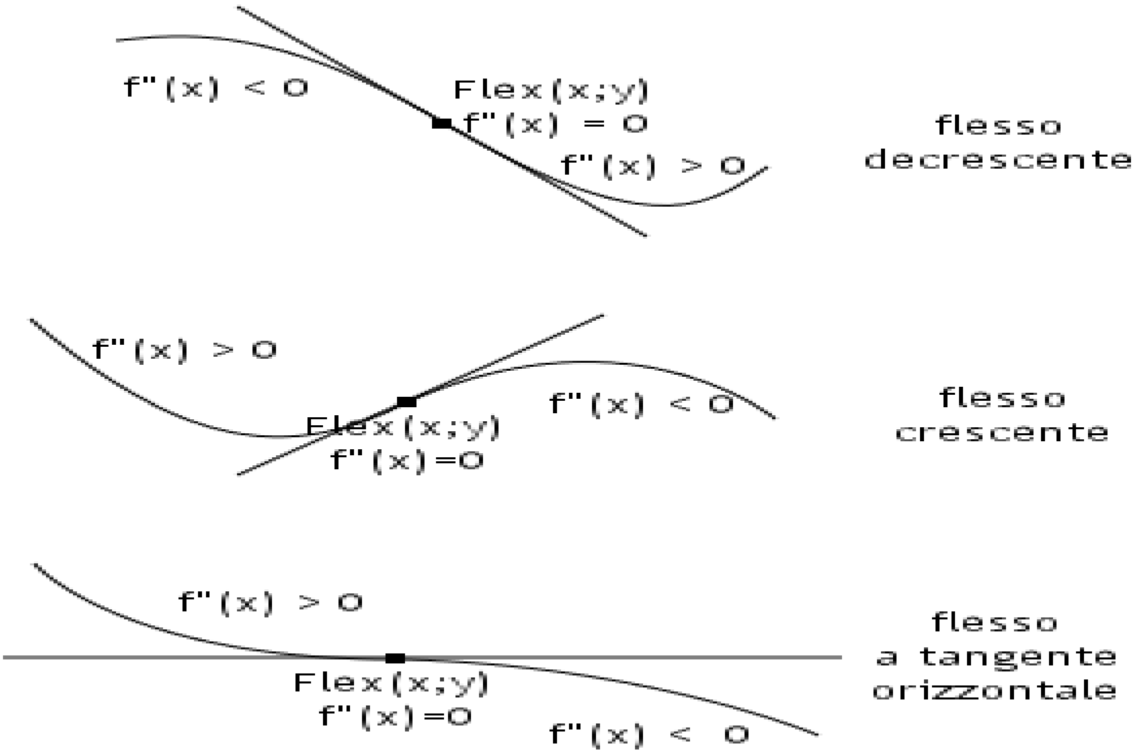
F'(x)>0 per x elemento di (a,x°)

F'(x)=0

F’(x)<0 per x elemento di (x°,b)

Allora x0 è un punto di massimo relativo per y=f(x).

Punti di Flesso



[flès-so] (part. pass. di flèttere) Piegato, curvato 2 LING Coniugato, declinato

AT Punto di flesso, punto in cui una curva attraversa la propria tangente invertendo la propria concavità. Intuitivamente un punto di flesso è un punto nel quale cambia la concavità: immaginando di camminare lungo la curva è il punto nel quale cambia la curvatura: se prima si girava verso destra, dopo si gira verso sinistra o viceversa.

I flesso è dunque un punto nel quale la concavità non è nè positiva nè negativa e quindi nulla. In altre parola la derivata seconda deve essere nulla.

f''(x) = 0

Di per sé però la condizione f''(x) = 0 non è sufficiente ad assicurare la presenza di un flesso; potrebbe anche trattarsi di un massimo o minimo piatto e cioè con derivate prima e seconda entrambe nulle.

La ricerca dei flessi è del tutto analoga a quella dei massimi e minimi sostituendosi alla derivata prima la derivata seconda.

Si tratta di:

Calcolare la derivata seconda della funzione f''(x).

Risolvere l'equazione f''(x) = 0.

Discutere le soluzione dell'equazione per decidere se si tratta realmente di un flesso.

Come per i massimi e minimi anche qui sono possibili due metodi:

I metodo per la ricerca dei punti di flessi: consiste nel risolvere la disequazione f''(x) > 0.

II metodo per la ricerca dei punti di flesso: consiste nell'esaminare il segno della derivata terza fiii(x) ed eventualmente delle derivate successive.

Primo metodo:

A differenza del II metodo il I metodo non richiede il calcolo di altre derivate, ma solo la soluzione della disequazione f''(x) > 0.

Le soluzioni della disequazione ci dicono dove la concavità è verso l'alto (f''(x) > 0) e dove verso il basso (f''(x) > 0). Osservando lo schema si può facilmente decidere se si tratta di un punto di flesso o di un punto piatto.

se la derivata seconda è positiva prima e negativa dopo il punto si ha un flesso.

se la derivata seconda è negativa prima e positiva dopo il punto si ha un flesso.

se la derivata seconda è positiva sia prima sia dopo si ha un punto piatto.

se la derivata seconda è negativa sia prima sia dopo si ha un punto piatto.

Esempio:

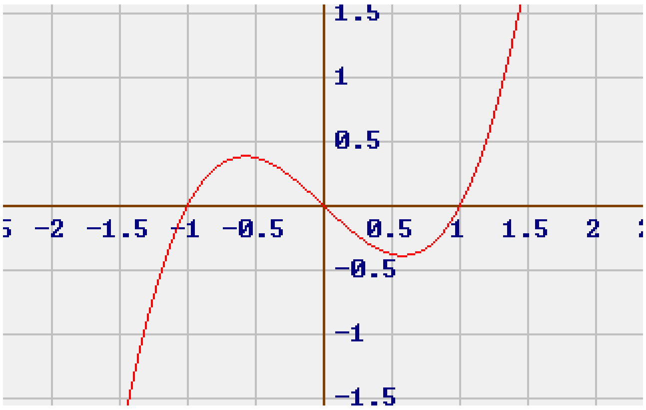
Sia data la funzione y = x^3 - x

Le derivate sono:

y' = 3x^2 - 1

y'' = 6x

y''' = 6



Uguagliando a zero si ha l'equazione 6x = 0, e una sola soluzione x = 0. La disequazione è rappresentata dallo schema a destra.

Osservando lo schema si vede che la concavità cambia per x = 0 e quindi si ha il flesso Flex(0;0) coincidente con l'origine; la derivata prima 3x2 - 1 vale -1 per x = 0 e quindi il flesso ha tangente decrescente.