Concetti su funzioni logaritmiche e numeri irrazionali: copyright Fabriziomax

Una funzione è irrazionale quando la variabile indipendente figura sotto segno di radice...
In matematica, un numero irrazionale è un numero reale che non è un numero razionale, cioè non può essere scritto come una frazione a / b con a e b interi, con b diverso da zero. I numeri irrazionali sono esattamente quei numeri la cui espansione in qualunque base (decimale, binaria, ecc) non termina mai e non forma una sequenza periodica.... hanno un infinito numero di termini decimali... cioè non possono essere scritti come una frazione a / b con a e b interi.
L'introduzione di questi numeri nel panorama matematico è iniziata con la scoperta da parte dei greci delle grandezze incommensurabili, ossia prive di un sottomultiplo comune.
Alcuni numeri irrazionali sono numeri algebrici come Rad(2) (la radice quadrata di due) e (la radice cubica di 5); altri sono numeri trascendenti come π ed e. Infine di logaritmi sono anch'essi irrazionali!

Ricordando la seguente:

Indicata con e o b la base del logaritmo:
y=logbx oppure y=lnx
x=b^y oppure x=e^y

La regola generale è che se hai l'uguaglianza

1) **x = y**

allora vale anche l'uguaglianza

2) **b^X = b^Y**

Dal semplice confronto tra la 1 e la 2 possiamo ricavare la seguente (rammentando anche che log10=1):

x = b^y (formula di trasformazione)

quindi siamo passati da un'equazione logaritmica a un'equazione esponenziale (e quindi anche da una funzione (" f ") logaritmica, alla sua funzione inversa esponenziale (" f^(-1) ")).

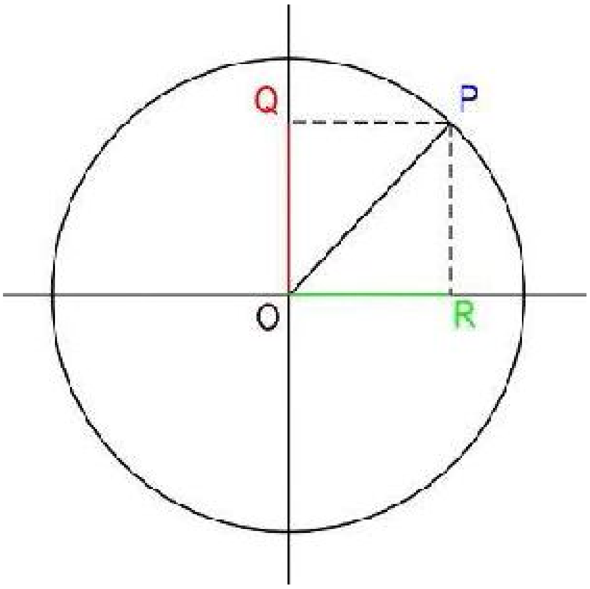
Verifichiamone la correttezza formale:

y=logbx diventa: x=b^y che possiamo verificare ponendo b(base) uguale a 10 e x eguale a 2, ottenendo:

y=log2=0.301029995

ora se si sostituisce y appena trovato nella x=b^y, ossia 10^0.301029995=1.9 (periodico), ossia l'equazione risulta soddisfatta.

Esercizio 1.4 Determinare il valore del seguente limite lim *x!0* sin(2*x*)/sin *x*
Soluzione:
Conoscendo il limite notevole: lim x→0 sinx/x=1 (pag. 342)
sin(2*x*)/sin *x*= 2 * sin(2*x*)/2*x* * *x*/sin *x*
a)
lim[x->0] (sinx / x) = 1 is an identity that's well known, and can be proved geometrically:
To get x/sinx, you just need to find the reciprocal, which is just 1.
b)
L'Hopital's Rule:
=Lim x->0 1/cos(x)
cos(x) -> 1 as x-> 0.
The limit is 1/1 =1
c) using Taylor's theorem
sin x = x - x^3/3! + higher powers of x
now divide tghru by x above and below
so you get Lim 1/(1 -x^2/3! + &c) which is simply 1
*One way to prove it is with L'Hospital's Rule. It states that if a limit is indeterminate via substitution, such as sin(0)/0 = 0/0 in this case, then the limit as x approaches a of f(x)/g(x) = limit x approaches a f'(x)/g'(x) (the limit of the ratio of the derivatives.) Derivative of sin(2x) is 2cos(2x) and derivative of 2x = 2*1=2.*
*Limit as x approaches 0 of 2cos(2*0)/2 = 2*cos(0)/2 = 2*1/2 = 1.*



b)

Definizione di seno di un angolo

Dato il triangolo rettangolo ORP in figura, si dice seno dell'angolo α il rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa del triangolo, in simboli:

sin(a)=RP/OP

Ricordate che abbiamo scelto una circonferenza goniometrica, che ha raggio 1, di conseguenza, in questo caso si ha: sin(a)=RP (si pone sull'asse delle Y)

poiché OP è raggio della circonferenza.

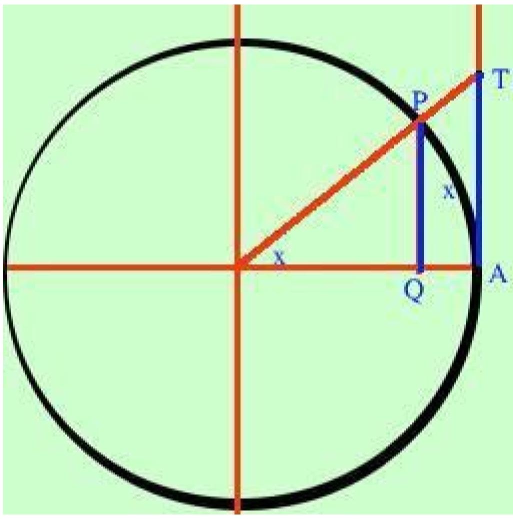
Definizione di coseno di un angolo

Dato il triangolo rettangolo ORP in figura, si dice coseno dell'angolo α il rapporto tra il cateto adiacente all'angolo e l'ipotenusa del triangolo, in simboli:

cos(a) =OR/OP

Ancora una volta, poiché la circonferenza ha raggio unitario si ha: cos(a)=OR (si pone sull'asse delle X)

Poiché OP è raggio della circonferenza.



Primo limite notevole :

Dobbiamo calcolare il valore del limite:

limx->0 senx/x =

e per fare questo utilizzeremo il teorema "dei carabinieri", cioe' prenderemo una funzione che sia sempre maggiore, una funzione che sia sempre minore e vedremo che entrambe le funzioni per x che tende a zero valgono 1 di conseguenza il nostro limite varra' 1

Consideriamo questa disuguaglianza

sen x<x<tang x

che, come si puo' vedere dalla figura e' valida essendo PQ (sen x) minore dell'arco x che a sua volta e' minore di AT (tang x), ora se divido tutto per senx (e posso farlo senza cambiare niente perche' e' positivo) otterro'

sen x/sen x < x/sen x < tang x/sen x

semplificando

1 < x/sen x < 1/cos x

Ora invertendo i termini basta cambiare di verso alle disuguaglianze

1 > (sen x)/x > cos x

ora abbiamo

lim x->0 1 = 1

e

lim x->0 cos x = cos0=1

da cio' segue che anche per quella in mezzo

lim x->0 senx/x = 1

Ora se invece di 1 > (sen x)/x > cos x

Abbiamo: 1 > (sen 2x)/2x > cos 2x

Lim x->0 cos 2x = cos0=1 e lim x->0 1 = 1

Ossia 1 > (sen 2x)/2x > cos 2x ossia: 1 > (sen 2x)/2x > 1. Da ciò ne consegue obbligatoriamente che anche sen2x/2x=1 per lim x□0

Quindi, usando i limiti notevoli e il cambio di variabile si ha

Lim *x!0* sin(2*x*)/sin*x*= 1.

Pertanto: sin(2*x*)/sin *x*= 2 * sin(2*x*)/2*x* * *x*/sin *x=2*1*1=2.*