PARTE 1 di 2 A

INTEGRAZIONE PER PARTI by FABRIZIO M. COPYRIGHT $f(x)\cdot g(x)$ 02/02/2015

$$d[f(x)\cdot g(x)] = g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x) \Rightarrow [f(x)\cdot g(x)]' = g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x) \Rightarrow$$

$$\int [f(x)\cdot g(x)]' = \int g(x)\cdot f'(x) + \int f(x)\cdot g'(x) \Rightarrow f(x)\cdot g(x) = \int g(x)\cdot f'(x) + \int f(x)\cdot g'(x) \Rightarrow$$

$$\int f(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)\,dx \quad (1)$$

N.B.: $f(x)\cdot g(x)$, sono le primitive $\Rightarrow$ se suppongo di avere $g'(x)$ devo risalire alla primitiva $g(x)$ a risolvere in modo corretto questo integrale indefinito –

N.B.: Poiché l'operazione di integrazione è più complessa di quella di derivazione tra le (2) dobbiamo scegliere di integrare la funzione più facile!

Ricordandoci che: $y'(\varepsilon^x) = \varepsilon^x$ e $\int \varepsilon^x = \varepsilon^x + c$; $y'(\varepsilon^{g(x)}) = f(x)\cdot g'(x)$

$y = k f(x) \Rightarrow y' = k f'(x)$ utilizzando lo schema:

	$f(x)$	$g(x)$	
$f(x)$	$f(x)$ DATO	$g'(x)$ DATO	$G'(x)$
$f'(x)$	$f'(x)$	$G(x)$ PRIMITIVA	$G(x)$

Iniziamo con il calcolare $\int x\,\varepsilon^{2x}\,dx \Rightarrow$

	$f(x)$	$G(x)$	
$f(x)$	x DATO	ε^{2x} DATO	$g(x)$
$f'(x)$	1	$\frac{\varepsilon^{2x}}{2}$ (*)	$G(x)$

(*) La primitiva di ε^{2x} è: $\frac{\varepsilon^{2x}}{2}$, infatti:

$$y = \frac{1}{2}\cdot\varepsilon^{2x} \Rightarrow y' = k\cdot f(x)\cdot g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\varepsilon^{2x}\cdot(2x)' = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\varepsilon^{2x}\cdot\cancel{2} = \varepsilon^{2x}$$ $\Rightarrow$ come volevasi dimostrare (*)

Applicando la (1) otteniamo: $x\cdot\underset{(*)}{\frac{\varepsilon^{2x}}{2}} - \int\underset{(*)}{\frac{\varepsilon^{2x}}{2}}\cdot(x)'dx = x\cdot\frac{\varepsilon^{2x}}{2} - \int\frac{\varepsilon^{2x}}{2}dx = x\cdot\frac{\varepsilon^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int\varepsilon^{2x}dx =$

$\Rightarrow$ se la y' di $\frac{\varepsilon^{2x}}{2} = \varepsilon^{2x}$, il suo $\int\varepsilon^{2x}$ varrà: $\frac{\varepsilon^{2x}}{2}$ $\Rightarrow$ sostituendo: $x\cdot\frac{\varepsilon^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^{2x} = x\cdot\frac{\varepsilon^{2x}}{2} - \frac{1}{4}\varepsilon^{2x} + c =$

$$= \frac{2x\varepsilon^{2x} - \varepsilon^{2x}}{4} + c = \frac{2x\varepsilon^{2x}}{4} - \frac{\varepsilon^{2x}}{4} + c = \frac{\varepsilon^{2x}}{4}(2x-1) + c$$ _

Vediamo ora come procedere per un caso più complesso, ossia: $\int_0^1 (1-x^2)\cdot\varepsilon^{(1-2x)}\,dx \Rightarrow$

Integro x parti $\Rightarrow$ (*)

$f(x)$	$1-x^2$ DATO	ε^{1-2x} DATO	$g'(x)$
$f'(x)$	$-2x$	$\frac{\varepsilon^{1-2x}}{-2}$ (*)	$G(x)$

(*) La primitiva di ε^{1-2x} è: $\frac{\varepsilon^{1-2x}}{-2}$, infatti: $y = \frac{\varepsilon^{1-2x}}{-2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = -\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^{1-2x}\cdot(1-2x)' = -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\varepsilon^{1-2x}\cdot -\cancel{2} = \varepsilon^{1-2x} \\ y' = k\cdot f(x)\cdot g'(x) \Rightarrow \text{come volevasi dimostrare (*)} \end{cases}$$

Pertanto applico la (1) e ottengo:

$$(1-x^2)\cdot\frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{-2} - \int -\cancel{2}x\cdot\frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{\cancel{-2}} \Rightarrow (1-x^2)\cdot\frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{-2} - \underbrace{\int x\cdot\varepsilon^{(1-2x)}}_{(**)}$$ $\Rightarrow$ applicando ancora la

(1) x scendere di grado, ottengo sulla (**):

$f(x)$	x	ε^{1-2x}	$G'(x)$
$f'(x)$	1	$\frac{\varepsilon^{1-2x}}{-2}$ (*)	$G(x)$

(*) La primitiva di ε^{1-2x} è: $\frac{\varepsilon^{1-2x}}{-2}$, Infatti: $y = \frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{-2} = y' = k\cdot f(x)\cdot g'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^{(1-2x)}\cdot -2 = \varepsilon^{(1-2x)}$, come volevasi dimostrare

Pertanto applicando di nuovo la (1), ottengo:

$$(1-x)^2\cdot\frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{-2} - \left\{f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)\,dx\right\} =$$

$$(1-x^2)\cdot\frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{-2} - \left\{x\cdot\frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{-2} - \int\frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{-2}\cdot 1\,dx\right\} = (1-x^2)\cdot\frac{\varepsilon^{1-2x}}{-2} - \left\{x\cdot\frac{\varepsilon^{1-2x}}{-2} + \frac{1}{2}\int\varepsilon^{1-2x}dx\right\} \Rightarrow$$

Se y' di $f(x) = -\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^{1-2x} = -\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^{1-2x}\cdot(-2) = \varepsilon^{1-2x}$, il nostro $\int$ varrà: $-\frac{1}{2}\varepsilon^{1-2x}$, che sostituiamo:

$$(1-x^2)\cdot\frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{-2} - \left\{x\cdot\frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{-2} + \frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}\varepsilon^{(1-2x)}\right\} = (1-x^2)\cdot\frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{-2} - \left\{x\cdot\frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{-2} - \frac{1}{4}\varepsilon^{(1-2x)}\right\} =$$

$$= \left[\frac{-\varepsilon^{1-2x}}{2} + \frac{x^2 \cdot \varepsilon^{(1-2x)}}{2} + \frac{x \cdot \varepsilon^{(1-2x)}}{2} + \frac{\varepsilon^{(1-2x)}}{4} \right]_0^1 \Rightarrow$$

$$= \left[\frac{-2\varepsilon^{(1-2x)} + 2x^2 \cdot \varepsilon^{(1-2x)} + 2x\,\varepsilon^{(1-2x)} + \varepsilon^{(1-2x)}}{4} \right]_0^1 \Rightarrow [1-0] \Rightarrow$$

$$= \frac{\cancel{-2\varepsilon^{-1}} + \cancel{2\varepsilon^{-1}} + 2\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1} - (-2\varepsilon^{1} + 0 + 0 + \varepsilon^{1})}{4} = \frac{3\varepsilon^{-1} + 2\varepsilon - \varepsilon^{1}}{4} = \frac{3\varepsilon^{-1} + \varepsilon}{4}$$