Alcuni concetti e defnizioni fondamentali sulle matrici by Fabriziomax:

1) Spazio Sn o Rn.

Intendiamo la totalità dei vettori ad n componenti. E' uno spazio vettoriale di dimensione n. N.ro di righe * n.ro di colonne di una matrice (Area o volume).

2) Dimensione di uno spazio vettoriale

Pertanto, dato uno spazio vettoriale S, si definisce come sua *dimensione* il massimo numero di vettori (righe) linearmente indipendenti appartenenti ad S.

3) Sottospazio

Un sottoinsieme S_o di uno spazio vettoriale S e' detto *sottospazio* di S se risulta chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare. Il vettore **0** è elemento di ogni sottospazio di S.

4) Combinazione lineare

Dati *p* vettori ad n componenti: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$, si dice combinazione lineare dei vettori con coefficienti c_i la seguente espressione:

$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_p\mathbf{x}_p$

5) Dipendenza lineare (di un vettore da altri)

Sia **y** un vettore ad n componenti. Se è esprimibile come combinazione lineare di p vettori (sempre ad n componenti) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$, si dice che **y** è linearmente dipendente dai p vettori considerati.

6) Rango

Dato un insieme di vettori (di righe, ossia di basi) si definisce il suo *rango* come il numero massimo **di vettori** (di basi, ossia di righe) linearmente indipendenti ad esso appartenenti.

7) Base di uno spazio lineare

Si supponga che ogni vettore **x** di ordine n, appartenente ad S, sia esprimibile in un solo modo (univocamente) come combinazione lineare di p vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$, appartenenti ad S. Si dice allora che i p vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$, costituiscono una *base* di S. Numero di righe di una matrice. Si puo' dimostrare che un insieme generatore di S e' una base di S se e solo se è costituito da vettori linearmente indipendenti (ossia non possono essere combinati o trasformati linearmente). Si tenga però presente che uno stesso spazio può avere diverse basi.

8) Dimensione di uno spazio lineare

Si chiama *dimensione* di uno spazio lineare il numero **di elementi** della base (ossia delle righe, ossia dei vettori). Si può dimostrare che tutte le basi di uno stesso spazio lineare hanno lo stesso numero di elementi. Si puo' dimostrare che se S_0 è un sottospazio di S non coincidente con esso, allora $\dim(S_o) < \dim(S)$.

Vettori di una matrice linearmente dipendenti e indipendenti con computo del rango e relative definizioni:

Vediamo ora come si fà a vedere se una riga è linearmente dipendente o indipendente….

Per esempio per questa matrice(3x3):

-3 0 0

0 0 0

0 1 0

Qual'è il rango?

Cone sono tra loro le rispettive righe?

Risposta:

il rango o caratteristica di una matrice è dato dal determinante.

se il determinante di una matrice è diverso da zero, **il rango è massimo e corrisponde al numero delle righe di una matrice**.

In questo caso, se il determinante fosse diverso da zero, il rango sarebbe 3, ma poiche abbiamo una riga nulla, sicuramente il rango sarà <3.

Cerchiamo allora dei "minori" ossia delle sottomatrici di taglia piu piccola.

ad esempio prendendo

-3 0

0 1

il suo determinante è -3 per cui, siccome questo minore ha determinante non nullo, il rango della matrice è la dimensione del minore, ossia 2.

Inoltre, due righe sono LINEARMENTE DIPENDENTI se una può essere scritta come combinazione lineare dell'altra, (o delle altre, nel caso di più righe).

Nel nostro caso, 0 1 0 è indipendente dalle altre perche non esistono numeri A, B tali che:

A(-3 0 0) + B (0 0 0) = 0 1 0.

Esempio : in R

a) i vettori

(1,3);

(2,5) sono linearmente indipendenti(e sono una base di R^2)....infatti non esiste un [lambda*(1,3)=(2,.5)];

b) mentre i vettori:

(1,3);

(−7,−21) sono linearmente dipendenti…infatti: -7*(1,3)=(-7;-21)

Definizione di t (coefficiente di trasformazione di una combinazione lineare):

§(ax+by+c)+&(a’x’+b’y’+c’)=0, da cui: §(ax+by+c)=-&(a’x’+b’y’+c’), da cui:

t=&/§ (coefficiente di trasformazione per una combinazione lineare di equazioni o funzioni di I grado o di vettori).

Esempio: Con autovalore Lamda=4 e il seguente sistema già trasformato per Lamda=4:

2x’+2x’’=0

-3x’-3x’’=0, ossia 1x’=(2/3)*x’’, ossia: 3x’=2x’’ ne consegue, essendo §=3 e &=2 che t, sarà: =&/§=2/3, ossia (2 3) come base di S in quanto combinazione lineare di n vettori appartenenti ad S (vettori tra loro linearmente indipendenti).

Dato l’autovalore, abbiamo trovato che ogni altro auto valore sarà multiplo di x(2 3). Oppure il che è identico considerando la formula di base:

A*x=§x, che per A=1 è analogo alla 1x’=(2/3)*x’’, dove t=2/3. La base sarà (2 3).

Nel caso avessimo avuto: x’=-x’’, ossia x’=1/-1x’’, avremmo avuto t=1/-1, ossia la base (1 -1)