La Retta

Ogni **funzione di primo grado** rappresenta, graficamente, una **retta**.
L'equazione della retta può essere scritta in due modi

Forma implicita	Forma esplicita
$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$	$y = m \cdot x + q$ $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Esempio di scrittura dell'equazione di una retta:

$$5 \cdot x - 7 \cdot y + 9 = 0$$ Equazione implicita della retta

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{7}$$ Equazione esplicita

- *Differenza* di scrittura tra equazione implicita ed esplicita. Nell'**equazione implicita** tutti i termini compaiono ad un membro (in questo caso il primo membro) mentre all'altro membro vi lo zero. Nell'**equazione esplicita**, al primo membro vi è solo la *variabile dipendente* $\mathbf{y}$, con il coefficiente pari ad uno; mentre al secondo membro vi sono tutti gli altri termini: il monomio che contiene la *variabile indipendente* $\mathbf{x}$ $\left(\frac{3}{4}x\right)$ ed il termine noto $\left(-\frac{5}{7}\right)$.

L'equazione della retta nella forma esplicita non è altro che una funzione, pertanto essa può essere anche scritta in questo modo, utile quando si vuole analizzare la retta con un software matematico come il GeoGebra:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{5}{7} \\ y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{7} \end{cases}$$ sono due modi di scrivere dell'equazione esplicita della retta

Relazione tra i coefficienti dell'equazione della retta

Esiste una relazione tra i coefficienti **a**, **b**, **c**, dell'equazione della retta nella forma implicita ed i coefficienti **m**, **q** della retta scritta nella forma implicita?

La risposta è *affermativa*.

Le relazioni tra i vari coefficienti sono:

$$\mathbf{m = -\frac{a}{b}}; \qquad \mathbf{q = -\frac{c}{b}}$$

<u>*Esempio*</u>: Sia data l'equazione in forma esplicita della retta:

$$\mathbf{5 \cdot x - 9 \cdot y + 2 = 0}$$

Scrivere l'equazione della retta nella forma esplicita. Si possono seguire due strade:

a) Applicare le formule di trasformazione scritte sopra (ciò significa ricordarsele a memoria, ciò costituisce fonte di errore)

I coefficienti dell'equazione sono:

a = 5; **b = -9**; **c = 2**

Applicando le formule di trasformazione si ha:

$$\mathbf{m = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{-9} = +\frac{5}{9}}$$

$$\mathbf{q = -\frac{c}{b} = -\frac{2}{-9} = +\frac{2}{9}}$$

Infine l'equazione della retta nella forma esplicita è:

$$\mathbf{y = m \cdot x + q = +\frac{5}{9} \cdot x + \frac{2}{9}}$$

b) Se non si ricordano le formule di trasformazione, si applica il metodo generale di risoluzione di una equazione di primo grado. Si parte dalla equazione della retta

c)

$$\mathbf{5 \cdot x - 9 \cdot y + 2 = 0}$$

Questa viene risolta rispetto alla variabile **y**. I passi dell'elaborazione sono i seguenti:

$$\mathbf{-9y = -5x - 2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{-9y}{-9} = \frac{-5x-2}{-9}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = \frac{-5x-2}{-9}}$$

$$\mathbf{y = \frac{-5x}{-9} + \frac{-2}{-9}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = \frac{5x}{9} + \frac{2}{9}}$$

<u>*Esempio*</u>: Sia data in forma esplicita l'equazione della retta:

$$\mathbf{y = \frac{4}{5} \cdot x - \frac{2}{3}}$$

Scrivere l'equazione della retta nella forma implicita.
Risoluzione: si calcola il mc.m. dei due denominatori:

$$\mathbf{m.c.m}(5,\quad 3) = 15$$

Si moltiplica primo e secondo membro per il m.c.m. calcolato:

$$15 \cdot y = 15 \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot x - \frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad 15 \cdot y = 12 \cdot x - 10 \quad \Rightarrow$$

$$12 \cdot x - 15 \cdot y - 10 = 0$$

Rappresentazione grafica della retta

Esempio di rappresentazione grafica di una retta.
Sia data la seguente equazione:

$$\mathbf{3x - y + 4 = 0}$$

$$\mathbf{y = f(x) = 3x + 4}$$

Per rappresentare graficamente la funzione o l'equazione è necessario individuare alcuni punti per i quali passa la retta. Le coordinate dei punti si calcolano con il seguente metodo, metodo che può essere applicato per qualsiasi funzione.

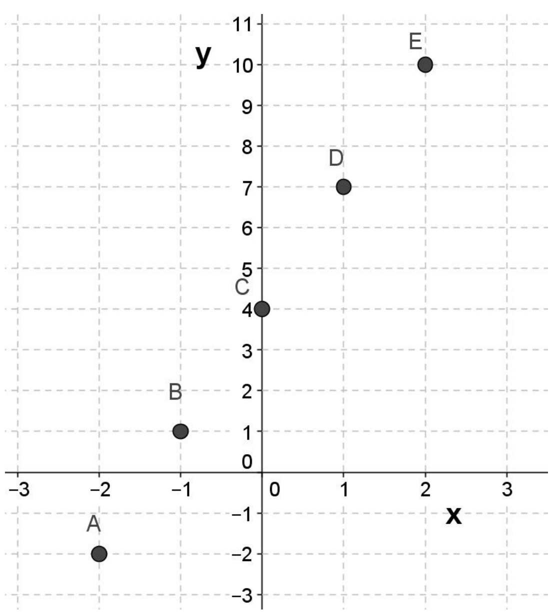
Innanzitutto, se la retta, o una qualsiasi altra equazione, è scritta nella forma implicita è necessario scriverla nella forma esplicita. Successivamente si compila una tabella contenente i valori delle coordinate dei punti della retta.

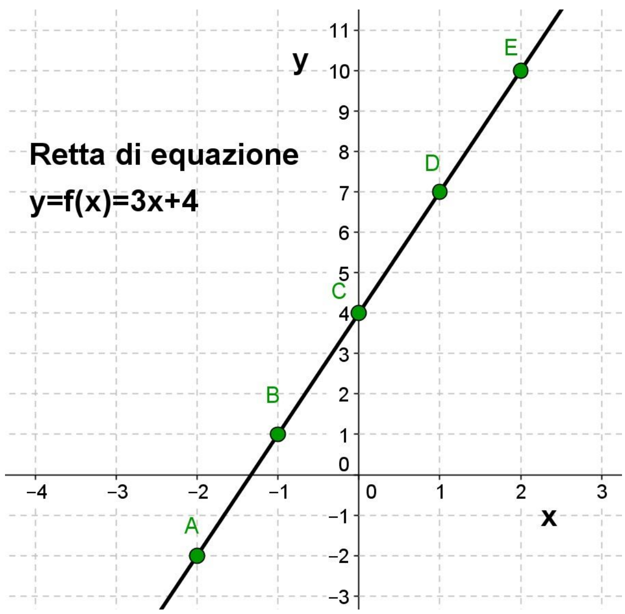
Si assegna alla variabile indipendente, **x**, un valore arbitrario(esempio: **x = - 2**); tale valore viene sostituito nell'equazione della retta. Il valore che si ottiene, dopo aver effettuato l'opportuno calcolo, è il valore della variabile dipendente, **y**, (**y = -2**). I due valori rappresentano le coordinate di un punto della retta.

Nella tabella vi sono alcuni esempi di calcolo dei punti della retta.

Variabile indipendente x	Variabile dipendente y = 3x + 4	Coordinate del punto
-2	f(-2) y= 3×(-2)+4= -2	A(-2, 2)
-1	f(-1) = y= 3×(-1)+4= 1	B(-1, 1)
0	f(0)y= 3×(0)+4=4	C(0, 4)
1	f(1)=y= 3×(1)+4=7	D(1, 7)
2	f(2) - y= 3×(2)+4=10	E(2, 10)

Dopo aver compilato la tabella, si disegnano gli assi cartesiani e si rappresentano i punti di cui si conoscono le coordinate. I seguenti grafici rappresentano il primo la rappresentazione dei punti ed il secondo la rappresentazione della retta $\mathbf{y} = 3\mathbf{x} + 4$.



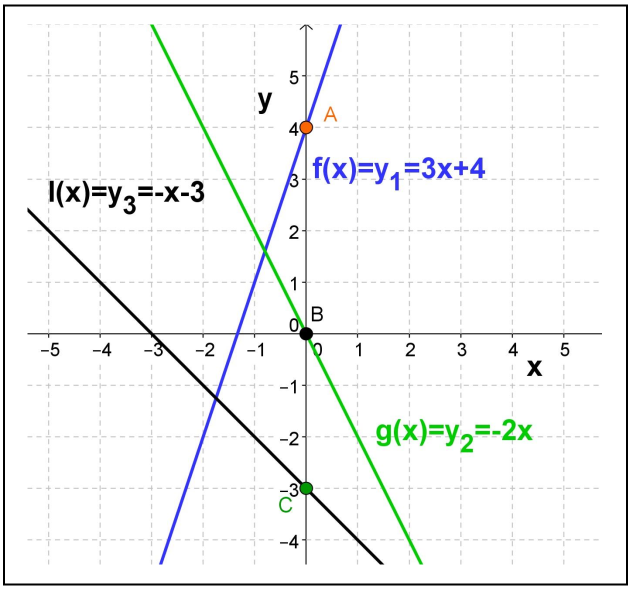


Significato del termine noto *q*

Nell'equazione esplicita della retta, il termine **q** è chiamato ***termine noto***. Per capirne il significato si considerino le equazioni di tre rette, scritte nella forma esplicita:

$$\mathbf{f(x) = y_1 = 3x + 4};\quad \mathbf{g(x) = y_2 = -2x};\quad \mathbf{l(x) = y_3 = -x - 3}$$

I tre cui grafici sono rappresentati nella seguente figura



Dalla figura si osserva che:

a) La retta $\mathbf{f(x) = y_1 = 3x + 4}$ interseca l'asse **y** in un punto la cui ordinata vale **4**;

b) La retta $\mathbf{g(x) = y_2 = -2x}$ interseca l'asse **y** in un punto la cui ordinata vale **0**.

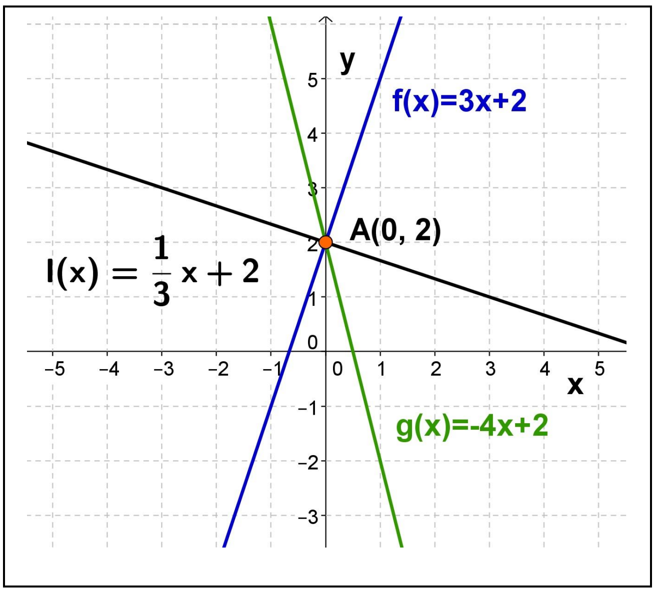
c) La retta $\mathbf{l(x) = y_3 = -x - 3}$ interseca l'asse **y** in un punto la cui ordinata vale **–3**.

Dall'analisi si nota che le ordinate dei punti di intersezione delle rette con l'asse delle ordinate, **y**, coincidono con i corrispondenti valori dei termini noti delle rette:

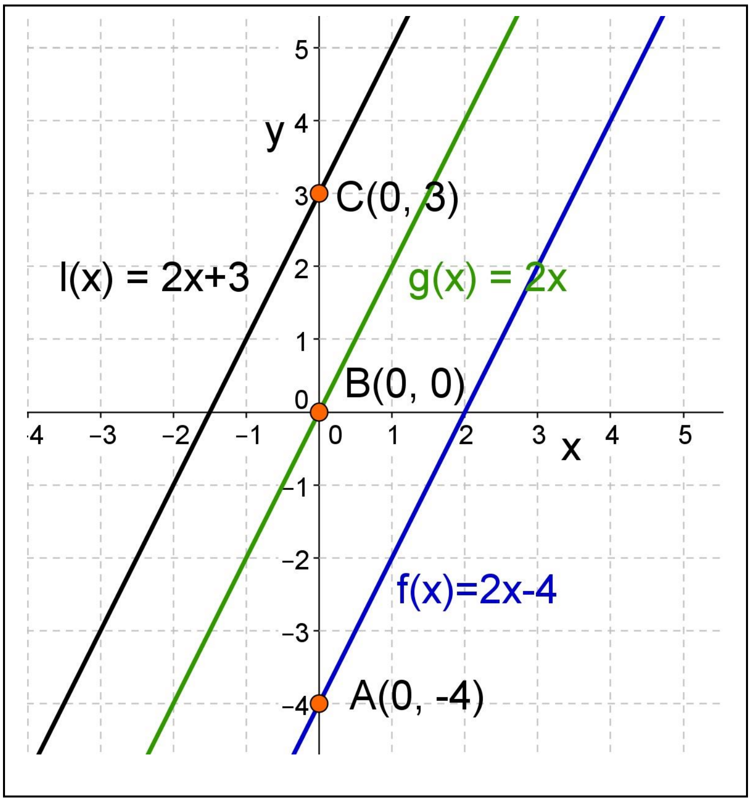
$$\mathbf{q}_1 = 4;\quad \mathbf{q}_2 = 0;\quad \mathbf{q}_3 = -3$$

Pertanto ***il termine noto,*** q, ***dell'equazione esplicita della retta, indica il valore della ordinata del punto di intersezione tra la retta e l'asse delle ordinate*** y**.**

Altri esempi



Le equazioni delle tre rette, rappresentate graficamente, hanno tutte lo stesso termine noto (**+2**). Le tre rette intersecano l'asse delle ordinate, y, nel punto A la cui ordinate è, appunto il numero **+2** [**A(0,2)**]. L'ascissa di tale punto è ovviamente uguale a zero.



Le tre rette intersecano l’asse delle ordinate tre punti le cui ordinate coincidono con il termine noto delle tre equazioni.

Le tre rette presentano una particolarità: hanno lo stesso coefficiente **m**. dal grafico di nota che le rette sono parallele.

Significato del coefficiente, *m*, della variabile indipendente *x*.

Il coefficiente della variabile indipendente **x**, indicato con **m**, è chiamato **coefficiente angolare**. Per capire il suo significato si considerino le seguenti cinque rette:

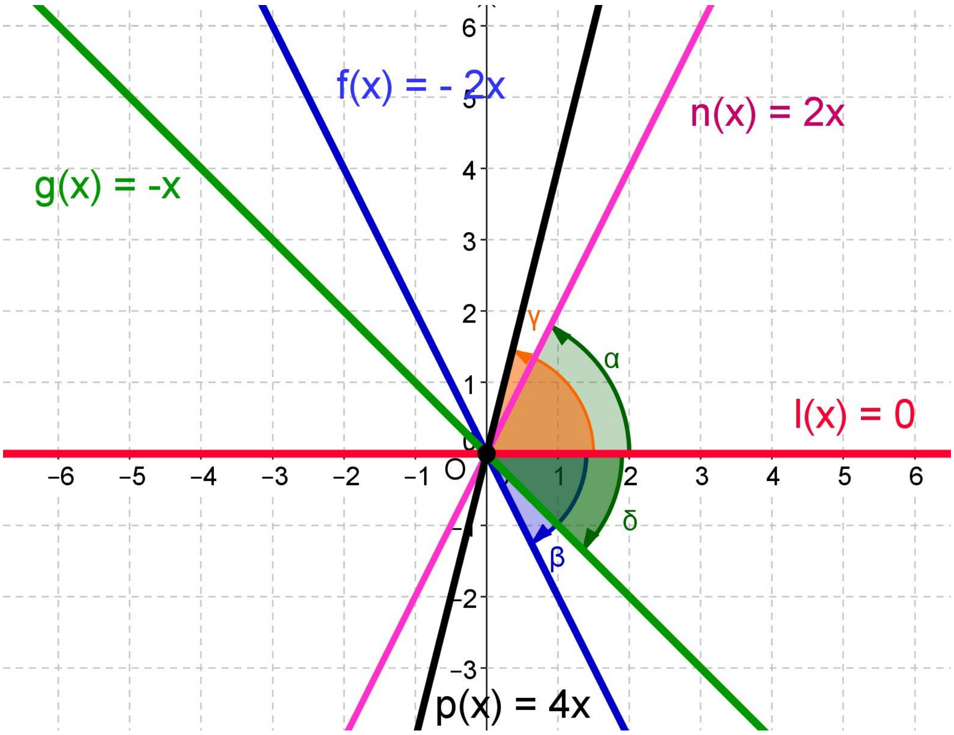
$\mathbf{f(x) = y_1 = -2x}$ $\mathbf{g(x) = y_2 = -x}$

$\mathbf{l(x) = y_3 = 0}$ $\mathbf{n(x) = y_4 = 2x}$

$\mathbf{p(x) = y_5 = 4x}$

Le cinque funzioni hanno una particolarità: i termini noti sono tutti nulli. Ciò vuol dire che le cinque rette passano tutte per l'origine degli assi cartesiani, **O(0, 0)**.

I cui grafici sono mostrati nella figura di sotto.



Analisi dei grafici

Le rette **p(x)** e **n(x)** hanno un coefficiente angolare **positivo**: $\mathbf{m_p = 4}$, $\mathbf{m_n = 2}$. Le due rette formano angoli **acuti**, **α** e **γ**, diversi rispetto all'asse delle ascisse. L'angolo, **α**, che la retta **n(x)** forma con l'asse delle ascisse è inferiore rispetto a quello, **γ**, formato dalla retta **p(x)**. Combinando le informazioni degli angoli con i valori dei coefficienti angolari si osservare che all'aumentare del valore del coefficiente angolare (positivo) aumenta anche l'angolo formato dalla retta con l'asse delle ascisse. Pertanto il **coefficiente angolare** è in relazione con l'ampiezza dell'angolo che la retta forma con l'asse **x**.

Le rette **f(x)** e **g(x)** hanno un coefficiente angolare **negativo**: $\mathbf{m_f = -2}$, $\mathbf{m_g = -1}$. Adesso le due rette formano angoli **ottusi** (oppure angoli **acuti negativi, β** e **δ**) rispetto all'asse delle ascisse **x**. Anche in questo caso, all'aumentare del coefficiente angolare negativo aumenta l'ampiezza dell'angolo ottuso, o l'angolo acuto negativo, formato dalle rette con l'asse delle ascisse **x**.

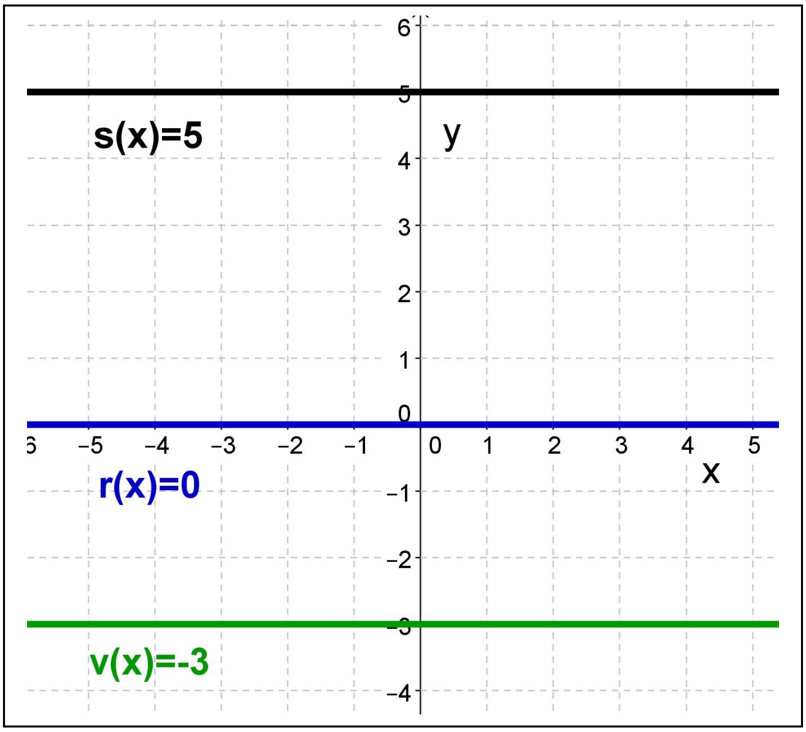
La retta $\mathbf{l(x)}$ rappresenta un caso particolare: il coefficiente angolare vale **zero**, $\mathbf{m_l=0}$, l'angolo che la retta forma con l'asse x è nullo e la retta coincide con l'asse delle ascisse. Quindi ***l'asse delle ascisse***, essendo una retta, ha la seguente equazione: $\mathbf{y} = 0$.

<u>Coefficiente angolare: casi particolari</u>

1) **m = 0**. Si considerino le seguenti rette

$$\mathbf{r(x) = y_6 = 0}; \qquad \mathbf{s(x) = y_7 = 5}; \qquad \mathbf{v(x) = y_8 = -3}$$

Confrontando le equazioni con quella generale, $\mathbf{y=m\cdot x+q}$, si nota che il loro **coefficiente angolare** è nullo ($\mathbf{m = 0}$). I grafici sono rappresentati nella seguente figura.



Osservando la figura si nota che le ***rette sono tutte parallele all'asse delle x***. Quindi le rette parallele all'asse delle ascisse hanno equazione del tipo:

$$\mathbf{y = k}$$

dove $\mathbf{k}$ coincide con il termine noto dell'equazione generale della retta ($\mathbf{k = q}$). Il significato di un'equazione del tipo $\mathbf{y = k}$ è il seguente: *la retta* $\mathbf{y = k}$ *è composta da punti che hanno tutti per ordinata il valore* **k**. Come esempio si prenda la retta

$$\mathbf{s(x) = y_7 = 5}$$

*I punti della retta hanno **tutti** ordinata* 5.

Come caso particolare delle rette del tipo $\mathbf{y = k}$ si scelga il seguente:

$$\mathbf{y} = 0$$

La retta è composta da punti che hanno tutti **ordinata nulla**. Questi punti si trovano sull'asse delle ascisse. Quindi l'**asse delle ascisse ha equazione**:

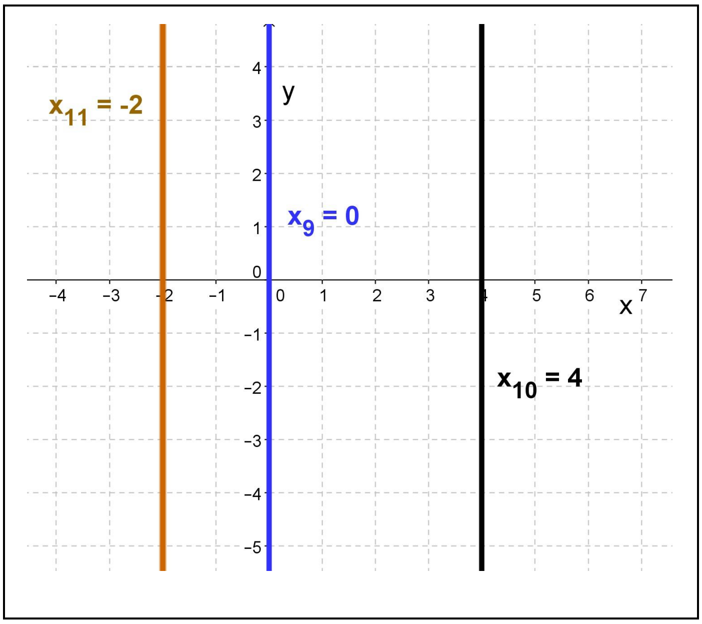
$$\mathbf{y} = 0$$

Ultima osservazione: le rette del tipo $\mathbf{y = k}$ formano con l'asse delle ascisse un **angolo** la cui ampiezza è **zero**.

2) $\mathbf{m = \infty}$. Si considerino le seguenti rette

$\mathbf{x_9 = 0}$; $\mathbf{x_{10} = 4}$; $\mathbf{x_{11} = -2}$

Il grafico delle tre rette è dato dalla seguente figura.



Dalla figura si osserva che ***le rette sono tutte parallele all'asse y***. Quindi *tutte le rette parallele all'asse delle ordinate*, **y**, hanno equazione del tipo:

$$\mathbf{x = k}$$

La *retta* $\mathbf{x = k}$ *è composta da punti che hanno tutti la stessa ascissa* $\mathbf{k}$. Come caso particolare si consideri la retta $\mathbf{x = 4}$. Questa è formata da punti che hanno tutti la stessa ascissa $\mathbf{4}$.

Come caso particolare si prende la retta di equazione sia:

$$\mathbf{x = 0}$$

La retta è composta da punti che hanno tutti la stessa ascissa che vale **zero**. Una tale retta non è altro che l'asse delle ordinate. Pertanto **l'asse delle ordinate ha equazione**: $\mathbf{x = 0}$

L'angolo che le rette formano con l'asse delle ascisse è un angolo retto. In questo caso il valore del coefficiente angolare è infinito ($\mathbf{m = \infty}$).

Nelle equazioni del tipo $\mathbf{x = k}$, il coefficiente, $\mathbf{b}$, della variabile dipendente è **nullo**.

Punto appartenente ad una retta

Problema: Sia data la seguente retta: **s)** $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$. Siano dati i seguenti punti: $A(2;\ 1)$; $B(3;\ 4)$. Stabilire chi appartiene alla retta.

Soluzione: La **x** e la **y**, che compaiono nell'equazione della retta, sono le coordinate degli infiniti punti che appartengono alla retta **s**. Pertanto affinché un punto appartenga ad una retta (o ad una qualsiasi curva di cui è data l'equazione) è necessario che le sue coordinate soddisfino all'equazione. Cioè, si devono sostituire, nell'equazione della retta, alle lettere **x** e **y** i valori dell'ascissa e dell'ordinata del punto. Dopo aver eseguito i calcoli si possono presentare due situazioni. Nella prima, l'uguaglianza è soddisfatta (cioè è vera l'uguaglianza), per cui il punto appartiene alla retta. Nella seconda, l'uguaglianza non è soddisfatta (cioè è falsa l'uguaglianza), allora il punto non appartiene alla ratta.

1° caso: Si sostituiscono nell'equazione della retta **s** le coordinate del punto **A**.

$$1(y)=\frac{4}{3}\cdot 2(x)-\frac{5}{3}=\frac{8}{3}-\frac{5}{3}=\frac{8-5}{3}=\frac{3}{3}=1$$

Dopo aver eseguito i calcoli, si nota che l'uguaglianza **è** soddisfatta, quindi il punto **A** appartiene alla retta **s**.

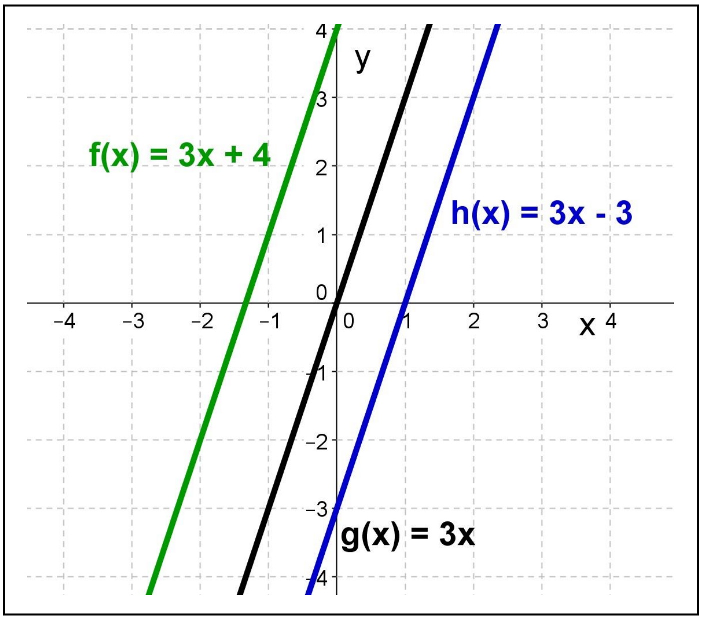
2° caso: Si sostituiscono nell'equazione della retta **s** le coordinate del punto **B**.

$$4(y)=\frac{4}{3}\cdot 3(x)-\frac{5}{3}=\frac{12}{3}-\frac{5}{3}=\frac{12-5}{3}=\frac{7}{3}$$

Dopo aver eseguito i calcoli, si nota che l'uguaglianza **non è** soddisfatta, quindi il punto **B** non appartiene alla retta **s**.

Rette particolari

Rette parallele



In geometria analitica ***due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare e diverso termine noto*** (in caso contrario le rette sono coincidenti).

Si considerino le seguenti rette:

$$\mathbf{f(x) = y_1 = 3x + 4};$$

$$\mathbf{g(x) = y_2 = 3x};$$

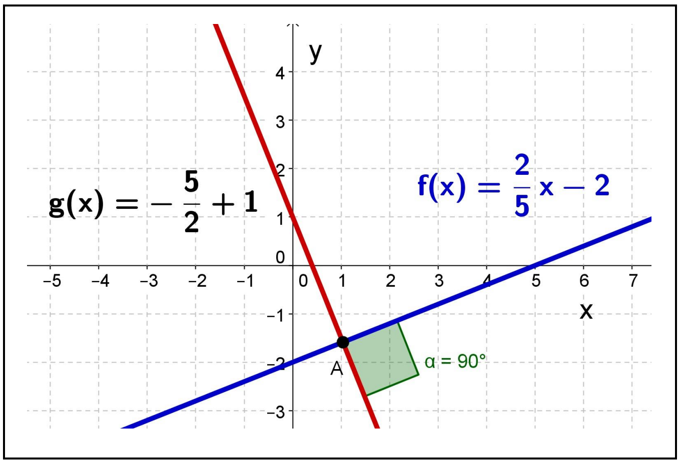
$$\mathbf{h(x) = y_3 = 3x - 3}$$

I coefficienti angolari delle tre rette sono:

$$\mathbf{m_1 = m_2 = m_3 = 3}$$

Dalla la figura si nota che le tre rette sono parallele.

Rette perpendicolari



In geometria analitica, ***due rette si dicono perpendicolari se il prodotto dei loro coefficienti angolari vale –1***. Se

$$\mathbf{y = m_1 \cdot x + q_1}$$

$$\mathbf{y = m_2 \cdot x + q_2}$$

sono le equazioni di due rette, esse sono **perpendicolari** se:

$\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1}$ ovvero

$$\begin{cases} \mathbf{m_1 = -\frac{1}{m_2}} \\ \mathbf{m_2 = -\frac{1}{m_1}} \end{cases}$$

Esempio: Si considerino le seguenti due rette:

$$\mathbf{f(x) = y_1 = \frac{2}{5}x - 2}$$

$$\mathbf{g(x) = y_2 = -\frac{5}{2}x + 1}$$

Il coefficiente angolare, $\mathbf{m_f}$, della retta $\mathbf{f(x)}$ è:

$$\mathbf{m_f = \frac{2}{5}}$$

mentre il coefficiente angolare, $\mathbf{m_g}$, della retta $\mathbf{g(x)}$ è:

$$\mathbf{m_g = -\frac{5}{2}}$$

Dalla scrittura dei due coefficienti angolari si nota che il coefficiente angolare, $\mathbf{m_f}$, della retta $\mathbf{f(x)}$ è l'opposto dell'inverso del coefficiente angolare, $\mathbf{m_g}$, della retta $\mathbf{g(x)}$.

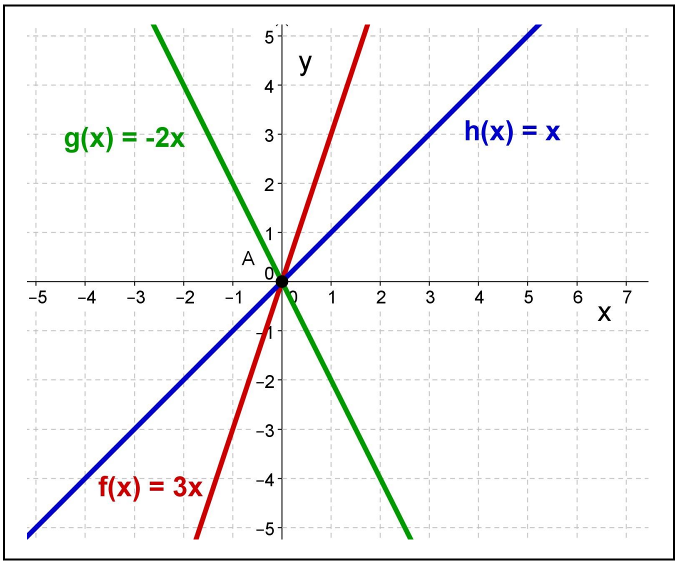
$$\mathbf{m_f = \frac{2}{5} = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{-\frac{5}{2}}}$$

Eseguendo il prodotto dei due coefficienti angolari si ha:

$$\mathbf{m_f \cdot m_g = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -1}$$

Osservando la figura si nota che le due rette sono **perpendicolari** tra di loro.

Rette passanti per l'origine degli assi cartesiani



Si considerino le seguenti rette di equazione:

$$\mathbf{f(x) = y_1 = 3x}$$

$$\mathbf{g(x) = y_2 = -2x}$$

$$\mathbf{h(x) = y_3 = x}$$

La caratteristica delle tre rette è che il loro **termine noto** vale **zero** (**q = 0**).

I grafici delle tre rette sono rappresentate nella figura. Da questa si osserva che le tre rette passano per l'origine degli assi cartesiani. Quindi ***se nell'equazione di una retta il termine noto è zero, allora la retta passa per l'origine degli assi cartesiani***.

Equazione di una retta

Adesso verranno analizzati vari problemi inerenti la retta

Retta passante per due punti

Uno dei postulati della geometria euclidea afferma che ***assegnati due punti, per essi passa una ed una sola retta***. Pertanto per scrivere l'equazione di una retta è necessario conoscere le coordinate di due suoi punti (in generale, per scrivere l'equazione di una retta sono necessarie due informazioni su di essa).

Siano dati i punti: $\mathbf{A}(\mathbf{x_A}; \mathbf{y_A})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x_B}; \mathbf{y_B})$. L'equazione della retta passante per i due punti è

$$(x_A - x_B)\cdot(y - y_B) = (y_A - y_B)\cdot(x - x_B)$$

oppure

$$(x_B - x_A)\cdot(y - y_A) = (y_B - y_A)\cdot(x - x_A)$$

ancora

$$\frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{x - x_B}{x_A - x_B}$$

Le equazioni scritte sopra sono equivalenti tra di loro, però le prime due sono più convenienti.

Esempio: Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $\mathbf{A}(2; 3)$ e $\mathbf{B}(-1; 4)$.

Prima soluzione: Applicando la prima formula dell'equazione della retta, si ottiene:

$$[2-(-1)]\cdot(y-4) = (3-4)\cdot[x-(-1)]$$

Eseguendo i calcoli si ottiene

$$3y - 12 = -x - 1$$

A questo punto, la retta può essere scritta sia nella forma implicita che nella forma esplicita:

Forma implicita: Tutti i monomi si scrivono al primo membro	***Forma esplicita***: La variabile y viene separata sia dalla variabile x che dai termini noti. Ovvero la variabile y rimane al primo membro, mentre il monomio con la variabile x ed i termini noti vengono scritti al secondo membro.
3y – 12 + x + 1 = 0 **x + 3y – 11 = 0**	**3y = - x – 1 +12** $y = \frac{-x+11}{3}$ $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

Continua ---

Seconda soluzione: Metodo del **coefficiente angolare**.

Un altro metodo per individuare l'equazione di una retta consiste nel calcolare prima il coefficiente angolare e successivamente il termine noto. L'equazione della retta è data nella forma esplicita:

$$y = m \cdot x + q$$

Conoscendo le coordinate di due punti, è possibile calcolare il coefficiente angolare, $\mathbf{m}$, della retta passante per essi. Dati i punti $\mathbf{A}(\mathbf{x_A}; \mathbf{y_A})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x_B}; \mathbf{y_B})$, il **coefficiente angolare**, $\mathbf{m}$, è:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{y_A} - \mathbf{y_B}}{\mathbf{x_A} - \mathbf{x_B}} = \frac{\mathbf{y_B} - \mathbf{y_A}}{\mathbf{x_B} - \mathbf{x_A}} = \frac{\Delta\mathbf{y}}{\Delta\mathbf{x}}$$

Se le coordinate dei punti sono $\mathbf{A}(2; 3)$ e $\mathbf{B}(-1; 4)$ (esempio precedente), allora il coefficiente angolare è:

$$\mathbf{m} = \frac{3-4}{2-(-1)} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

che è lo stesso valore trovato nell'esempio precedente.

Il termine noto si calcola nel seguente modo. La retta passa per uno dei due punti, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. dei due punti, se ne considera uno solo, ad esempio il punto $\mathbf{A}$. Tenendo presente l'equazione della retta

$$\mathbf{y} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q}$$

si nota che l'incognita è il termine noto, mentre gli altri elementi hanno i seguenti valori:

$$\mathbf{m} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_A} = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y_A} = \mathbf{3}$$

Sostituendo tali valori nell'equazione della retta si ha:

$$\mathbf{3} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{2} + \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{3} \cdot \mathbf{3} = \mathbf{3} \cdot \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{2} + \mathbf{q}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{9} = -\mathbf{2} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{q}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{9} + \mathbf{2} = +\mathbf{3} \cdot \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{11} = +\mathbf{3} \cdot \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$$

In conclusione l'equazione della retta, scritta nella forma esplicita, risulta:

$$\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{x} + \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$$

È identica quella trovata in precedenza.

Osservazioni:

Le notazioni $\Delta\mathbf{y}$ e $\Delta\mathbf{x}$ indicano le variazioni subite dalle variabili **y** e **x**:

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y_A} - \mathbf{y_B}, \qquad \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x_A} - \mathbf{x_B}$$

Inoltre questo secondo metodo di risoluzione del quesito fa parte del più generale problema di ***scrivere l'equazione di una retta passante per un punto ed avente un certo coefficiente angolare***.

Retta passante per un punto ed avente un certo coefficiente angolare

Si abbia una retta passante per il punto $\mathbf{A}(\mathbf{x_A}; \mathbf{y_A})$ ed avente un certo coefficiente angolare, **m**.

Nella geometria euclidea, per un punto passano infinite rette. Queste rette costituiscono un **fascio proprio di rette** con **centro** nel punto **A**. L'**equazione ti tale fascio di rette** è:

$$\mathbf{y - y_A = m \cdot (x - x_A)}$$

Esempio: Determinare l'equazione della retta passante per il punto $\mathbf{A}(2; 3)$ ed avente il coefficiente angolare **m = 5**.

Soluzione: La retta appartiene al fascio di centro A e l'equazione del fascio è:

$$\mathbf{y - 3 = m \cdot (x - 2)}$$

Di tutte le rette del fascio bisogna prendere in considerazione quella che abbia il coefficiente angolare **m = 5**. L'equazione della retta è pertanto

$$\mathbf{y - 3 = 5 \cdot (x - 2)}$$

Elaborando l'espressione, si può scrivere l'equazione della retta sia nella forma esplicita che in quella implicita

Forma implicita	*Forma esplicita*
$\mathbf{y} - 3 = 5 \cdot (\mathbf{x} - 2)$ $\mathbf{y} - 3 = 5\mathbf{x} - 10$ $-5\mathbf{x} + \mathbf{y} - 3 + 10 = 0$ $-5\mathbf{x} + \mathbf{y} + 7 = 0$ $+5\mathbf{x} - \mathbf{y} - 7 = 0$	$\mathbf{y} - 3 = 5 \cdot (\mathbf{x} - 2)$ $\mathbf{y} - 3 = 5\mathbf{x} - 10$ $\mathbf{y} = 5\mathbf{x} - 10 + 3$ $\mathbf{y} = 5\mathbf{x} - 7$

L'equazione della retta è stata trovata adoperando il concetto di fascio di rette. Però poteva essere trovata applicando il metodo del problema precedente.

Retta passante per un punto, A, e *parallela* ad un'altra retta

Esempio: Scrivere l'equazione della retta, $\mathbf{r}$, *passante* per il punto $\mathbf{A}(-3;4)$ e *parallela* alla retta, $\mathbf{s}$, di equazione $\mathbf{y} = 2\mathbf{x} - 9$.

Soluzione: Per quanto detto in precedente, due rette sono *parallele* se hanno lo stesso coefficiente angolare. Quindi il coefficiente angolare, $\mathbf{m_r}$, della retta $\mathbf{r}$ è uguale a quello, $\mathbf{m_s}$, della retta $\mathbf{s}$.

Il coefficiente angolare, $\mathbf{m_s}$, della retta $\mathbf{s}$ è:

$$\mathbf{m_s = 2}$$

A questo punto la soluzione del problema coincide con il caso precedente (retta passante per un punto ed avente un certo coefficiente angolare), pertanto l'equazione della retta $\mathbf{r}$ è:

$$\mathbf{y - 4 = 2 \cdot (x + 3)} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y = 2x + 10}$$

Retta passante per un punto, A, e *perpendicolare* ad un'altra retta

Esempio: Scrivere l'equazione della retta, $\mathbf{r}$, passante per il punto $\mathbf{A(5;-6)}$ e ***perpendicolare*** alla retta, $\mathbf{s}$, di equazione $\mathbf{y = \frac{3}{2}x + 8}$.

Soluzione: Due rette sono ***perpendicolari*** se il prodotto dei loro coefficienti angolari è $\mathbf{-1}$.

Il coefficiente angolare, $\mathbf{m_s}$ della retta, $\mathbf{s}$, è:

$$\mathbf{m_s = \frac{3}{2}}$$

Per come sono state definite le rette perpendicolari, indicando con $\mathbf{m_r}$ il coefficiente angolare della retta $\mathbf{r}$, si ha che:

$$\mathbf{m_r \cdot m_s = -1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m_r = -\frac{1}{m_s} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}}$$

Quindi il coefficiente angolare $\mathbf{m_r}$ è l'inverso dell'opposto del coefficiente angolare $\mathbf{m_s}$. Adesso il problema è identico a quelli esaminati precedentemente (equazione di una retta passante per un punto ed avente un certo coefficiente angolare). L'equazione della retta **r**, pertanto, è:

$$\mathbf{y - y_A = m_r \cdot (x - x_A)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y + 6 = -\frac{2}{3} \cdot (x - 5)}$$

Forma implicita	*Forma esplicita*
$\mathbf{y + 6 = -\frac{2}{3} \cdot (x - 5)}$	$\mathbf{y + 6 = -\frac{2}{3} \cdot (x - 5)}$
$\mathbf{y + 6 = \frac{-2x + 10}{3}}$	$\mathbf{y = -\frac{2}{3} + \frac{10}{3} - 6}$
$\mathbf{3y + 18 = -2x + 10}$	$\mathbf{y = -\frac{2}{3} + \frac{10 - 18}{3}}$
$\mathbf{2x + 3y + 18 - 10 = 0}$	$\mathbf{y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}}$
$\mathbf{2x + 3y + 8 = 0}$	

Distanza di un punto da una retta

Sono date le coordinate di un punto $\mathbf{A(x_A; y_A)}$ e l'equazione di una retta, $\mathbf{r}$: $\mathbf{y = mx + q}$ oppure $\mathbf{ax + by + c = 0}$. Per calcolare la distanza del punto $\mathbf{A}$ dalla retta r si utilizza la seguente espressione:

$$\mathbf{d(A, r) = \frac{|a \cdot x_A + b \cdot y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

dove $\mathbf{d(A, r)}$ è la distanza del punto $\mathbf{A}$ dalla retta $\mathbf{r}$. Del valore del numeratore della frazione bisogna prendere il suo valore assoluto per far sì che la distanza sia un numero positivo. Per calcolare la distanza l'equazione della retta deve essere scritta *sempre* nella sua forma implicita. Se l'equazione è scritta nella forma esplicita, allora bisogna trasformare l'equazione della retta dalla forma esplicita a quella implicita.

Esempio 1: Il punto è $\mathbf{A(7;-9)}$ e l'equazione della retta $\mathbf{r}$ è $\mathbf{2x + 3y - 5 = 0}$. Calcolare la distanza $\mathbf{d(A, r)}$.

Soluzione: Poiché la retta è scritta nella forma implicita, il valore della distanza $\mathbf{d(A, r)}$ si trova applicando la formula scritta sopra. La distanza è

$$\mathbf{d(A, r) = \frac{|2 \cdot 7 + 3 \cdot (-9) - 5|}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2}} = \frac{|14 - 27 - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|18|}{\sqrt{13}} = \frac{18 \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{18 \cdot \sqrt{13}}{13}}$$

Esempio 2: Il punto è $\mathbf{A(-8;+3)}$ e l'equazione della retta $\mathbf{r}$ è $\mathbf{y = \frac{4}{5}x + 9}$. Calcolare la distanza $\mathbf{d(A, r)}$.

Soluzione: Se l'equazione della retta è data nella forma esplicita, allora è necessario che essa venga scritta nella forma esplicita. Pertanto:

$$\mathbf{y = \frac{4}{5}x + 9} \qquad \mathbf{5y = 4x + 45} \qquad \mathbf{4x - 5y + 45 = 0}$$

Dopo la conversione da esplicita ad implicita si può calcolare la distanza come nell'esempio precedente:

$$\mathbf{d(A,r) = \frac{|4 \cdot (-8) - 5 \cdot (+3) + 45|}{\sqrt{(4)^2 + (-5)^2}} = \frac{|-32 - 15 + 45|}{\sqrt{16 + 25}} = \frac{|-2|}{\sqrt{41}} = \frac{2 \cdot \sqrt{41}}{41}}$$

Intersezione tra due rette

Due rette, **r** e **s**, con diverso coefficiente angolare si intersecano in un punto $\mathbf{A(x_A, y_A)}$.

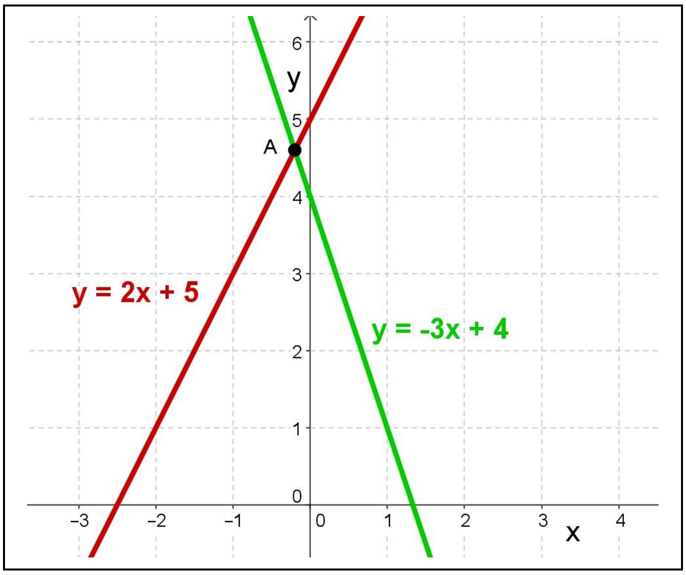
Geometria	Algebra
Punto **A**	x_A, y_A
Retta **s**	$\mathbf{a_1x + b_1y + c_1} = 0$ $\mathbf{y = m_1x + q_1}$
Retta **r**	$\mathbf{a_2x + b_2y + c_2} = 0$ $\mathbf{y = m_2x + q_2}$

Il punto **A**, pertanto, appartiene sia alla prima retta **r** che alla seconda retta **s**. A questa descrizione geometrica corrisponde una descrizione algebrica. Il punto algebrico è individuato dalle sue coordinate, $\mathbf{x_A}$ e $\mathbf{y_A}$. Questi due numeri soddisfano le equazioni delle due rette, cioè se vengono sostituite alle variabili delle due equazioni allora le due uguaglianze saranno vere. Per individuare algebricamente i due numeri è necessario risolvere il sistema di equazioni delle due rette.

__Esempio__: Calcolare le coordinate del punto, **A**, di intersezione delle rette, **r** e **s**, di equazioni:

$$\mathbf{y = 2x + 5} \qquad \mathbf{y = -3x + 4}$$

__Soluzione__: Prima di risolvere il problema e per comprendere ciò che è scritto sopra, si mostra una rappresentazione grafica delle due rette e del punto di intersezione.



Per trovare le coordinate $\mathbf{x_A}$ e $\mathbf{y_A}$ del punto **A**, è necessario risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{y = 2x + 5} \\ \mathbf{y = -3x + 4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{2x + 5 = -3x + 4}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{5x = -1} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{x = -\frac{1}{5}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 5 = -\frac{2}{5} + 5 = \frac{-2+25}{5} = \frac{23}{5}}$$

Quindi le coordinate del punto di intersezione sono:

$$\mathbf{A\left(-\frac{1}{5}; \frac{23}{5}\right)}$$