

ESERCIZIO N° 1) TROVARE LE COORDINATE DEL CENTRO E IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA $C_1: x^2+y^2+6x-8y+9=0$ E $C_2: x^2+y^2-4x+4y-1=\emptyset$

<< SVOLGIMENTO: >>

Ricordando l'equazione generica della circonferenza: $x^2+y^2+\alpha x+\beta y-\gamma=\emptyset$

In primis verifichiamo la condizione che il problema dà per scontato, ossia che si tratti realmente di due circonferenze.

Affinchè lo siano deve essere soddisfatta la condizione seguente:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma>0$$

Inizio con $C1 \Rightarrow \left(\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}\right)^2+\left(\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}}\right)^2-9>0;\ \cancel{9}+16-\cancel{9}>0 \Rightarrow 16>0$ {OK è una circonferenza}

In tal caso le coordinate del centro C sono $\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{-\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}};-\left(-\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}}\right)\right\} \Rightarrow (-3;4)$ E IL SUO RAGGIO, SARÀ:

$$R_1=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)+\gamma}=\sqrt{(3)^2+(-4)^2-9}=\sqrt{16}=4$$

Completo con $C_2 \Rightarrow$ (STESSO METODO) $\Rightarrow$

$\left(-\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}\right)^2+\left(\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}\right)^2-(-1)>0 \Rightarrow 4+4+1>0 \Rightarrow 9>0$ {OK è una circonferenza}

$C\left(-\left(-\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}\right);-\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow C(2;-2)$ E RAGGIO: $\sqrt{(2)^2+(-2)^2+1}=\sqrt{9}=3$

ESERCIZIO N° 2) DATA LA CIRCONFERENZA $C=x^2+y^2-4x+6y-12=0$, CALCOLA LA POSIZIONE RELATIVA (CIRCONFERENZA E RAGGIO) E LE EVENTUALI INTERSEZIONI RISPETTO ALLE RETTE $R_1: 5x+2y-4=0$ ED $R_2: 2x+y-1=0$. VERIFICA CHE IL PUNTO $T(-1;1)$ GIACE SULLA CURVA (CHE SIA UNA SOLUZIONE, PERTANTO, DEL FASCIO DEI CIRCOLI) E TROVA L'EQUAZIONE DELLA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA IN T.

SOLUZIONE:

Inizio col calcolare la posizione relativa di questa circonferenza $\Rightarrow$ ossia centro e raggio:

$C_1\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow C\left(+\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}};-\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow C(+2;-3)$ E PER IL RAGGIO $\Rightarrow$

$$R_1=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}=\sqrt{(2)^2+(3)^2-(-12)}=\sqrt{4+9+12}=\sqrt{13+12}=\sqrt{25}=5$$

Verifico per inibito SE $T(-1;1)$ GIACE SULLA CURVA (ossia sulla circonferenza) NEL SENSO CHE È UNA SUA RADICE CON LA SEGUENTE $\Rightarrow$

$T(-1;1) \Rightarrow (-1)^2+(1)^2-4\cdot(-1)+6\cdot 1-12=\emptyset$ (SARÀ VERO?)

$0=1+1+4+6-12 \Rightarrow 0=12-12=0 \Rightarrow$ LA CONDIZIONE BOOLEANA È VERIFICATA $\Rightarrow$ T GIACE SULLA CURVA!

VEDIAMO ORA L'intersezione (il sistema) TRA la circonferenza E LE due rette ALLA RICERCA DEL DISCRIMINANTE Δ, RICORDANDO CHE SE
$\Delta>0$ RETTA SECANTE LA CIRC.
$\Delta<0$ RETTA ESTERNA ALLA CIRC.
$\Delta=0$ RETTA TANGENTE ALLA CIRC. $\downarrow$ 2 soluzioni reali e coincidenti

AVREMO PERTANTO LA SEGUENTE COPPIA DI SISTEMI PARALLELI:

1°) $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y-12=\emptyset \\ 5x+2y-4=\emptyset \end{cases}$ 2°) $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y-12=\emptyset \\ 2x+y-1=\emptyset \end{cases}$

Risolvo entrambi esplicitando la $(y) \Rightarrow$

$\begin{cases} y=2-\frac{5}{2}x \\ x^2+\left(2-\frac{5}{2}x\right)^2-4x+6\left(2-\frac{5}{2}x\right)-12=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1-2x \\ x^2+(1-2x)^2-4x+6(1-2x)-12=0 \end{cases}$

AGENDO SU ENTRAMBI I SISTEMI SULLA 2ª EQUAZIONE, OTTENGO:

$x^2+4-\left(2\cdot 2\cdot -\frac{5}{2}x\right)+\frac{25}{4}x^2-4x+12-15x-12=0$ (E) $x^2+1-4x+4x^2-4x+6-12x-12=0$

RACCOGLIENDO E SEMPLIFICANDO AVREMO:

$$x^2+4+10x+\frac{25}{4}x^2-19x=0 \qquad (E)\quad 5x^2-20x-11=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=400+220=620>0$$

$$x^2+4-9x+\frac{25}{4}x^2=0$$

E' SECANTE ⇒

$$4x^2+16-36x+25x^2=0$$

$$29x^2-36x+16=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-36)^2-4\cdot16\cdot29=$$

$$=1296-1856<0$$

E' ESTERNA ALLA CIRCONFERENZA

CERCHIAMO ORA L'EQUAZIONE DELLA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA IN T ⇒

E' chiaro che dato un fascio di rette proprio passanti per l'origine O degli assi cartesiani solo e solo 2 rette potranno essere tangenti alla nostra circonferenza, ossia:

, e cioè R_1 ed R_2 di coefficiente angolare rispettivamente M_1 ed M_2 –

Le nostre due rette, esplicitate in questo fascio proprio, avranno la forma seguente:

$$\begin{cases} y-y_1=m_1(x-x_1)\\ y-y_1=m_2(x-x_1)\end{cases} \Rightarrow$$

Ricordiamo che per disegnare una retta servono o 2 punti o 1 punto e l'angolo o se preferite il coefficiente angolare M ⇒ M_1 e M_2 –

Affinché le nostre due rette siano tangenti alla circonferenza ricordiamo che deve essere $\Delta=0$ –

Poiché un punto lo conosciamo ed è $T(-1;1)$, formo il sistema tra l'equazione della circonferenza e quella della generica retta passante per $T(-1;1)$ ⇒

$$\begin{cases} y-1=m_1(x+1)\\ x^2+y^2-4x+6y-12=0\end{cases}$$

B) Ricordando che $(A+B+C)^2=$ $=a^2+B^2+C^2+2ab+2aC+2BC$ ⇒

$$\begin{cases} y=mx+m+1\\ x^2+(mx+m+1)^2-4x+6(mx+m+1)-12=0\end{cases}$$ (Risolvendo la 2ª) ⇒

$$x^2+m^2x^2+m^2+1+2m^2x+2mx+2m-4x+6mx+6m+6-12=0$$

$$x^2+m^2x^2+m^2+2m^2x+8mx+8m-4x-5=0$$

$$x^2\underbrace{(1+m^2)}_{a}+2x\underbrace{(m^2+4m-2)}_{b}+\underbrace{(m^2+8m-5)}_{c}=0$$

Ricordiamo ancora (si veda anche TARTENVILLE) che la condizione di tangenza è soddisfatta se il discriminante è nullo e quindi:

NOTA SU TARTAVILLE $\Rightarrow x_1 + x_2 = \dfrac{-b+\Delta}{2a} + \dfrac{-b-\Delta}{2a} =$

$= \dfrac{-b+\Delta-b-\Delta}{2a} = -\dfrac{2b}{2a} = -b/a$ E QUINDI: $\dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{-b}{a} : 2 = \dfrac{-b}{2a}$

CONTINUAZIONE SVOLGIMENTO ESERCIZIO N° 2 DA PAG. 2 $\Rightarrow$

$b^2 \Rightarrow 2^2 \cdot (m^2+4m-2)^2 = 4\left(m^4+16m^2+4+2m^2\cdot(4m)+2m^2\cdot(-2)+2(4m)(-2)\right) =$

$= 4(m^4+16m^2+4+8m^3-4m^2-16m) = 4(m^4+8m^3+12m^2-16m+4)$

$-4ac \Rightarrow -4(1+m^2)(m^2+8m-5) = -4(m^2+8m-5+m^4+8m^3-5m^2) =$

$= -4(m^4+8m^3-4m^2+8m-5)$ E QUINDI $b^2-4ac \Rightarrow$

$\Delta/4 = m^4+8m^3+12m^2-16m+4-(m^4+8m^3-4m^2+8m-5) =$

$= \cancel{m^4}+\cancel{8m^3}+12m^2-16m+4\cancel{-m^4}\cancel{-8m^3}+4m^2-8m+5 =$

$= 16m^2-24m+9 = 0 \Rightarrow$ Risolvo l'equazione di 2° GRADO $\Rightarrow$

$m = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{24 \pm \sqrt{24^2-4\cdot 9\cdot 16}}{2a} = \dfrac{24 \pm \sqrt{576-576}}{2\cdot 16} =$

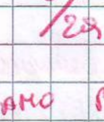
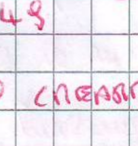
$= \dfrac{24 \pm 0}{2\cdot 16} = \dfrac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{2\cdot 16}} = {}^3\cancel{12}/\cancel{16}_4 = 3/4 \Rightarrow \{m_{1,2}\} \Rightarrow$ 2 soluzioni reali coincidenti!!

Sostituendo il coefficiente angolare trovato alla nostra retta passante per $T(-1;1)$,

troviamo la retta tangente $\Rightarrow y-1 = \dfrac{3}{4}(x+1) \Rightarrow 4y-4 = 3x+3 \Rightarrow$

$4y-4-3x-3=0 \Rightarrow -3x+4y-7=0 \Rightarrow 3x-4y+7=0$

ESERCIZIO N° 4) TROVA L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON FUOCO $F(1;-3)$ E DIRETTRICE $y=-2$. TROVA L'EQUAZIONE DELLA TANGENTE ALLA PARABOLA NEL SUO VERTICE_

CONSIDERANDO CHE IL SUO ORIENTAMENTO È  E NON , POSSIAMO AFFERMARE che le coordinate del fuoco sono: $\left(\dfrac{1}{4a}-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right) \rightarrow$ non in questo caso!

(NOTA: lo si comprende dalla direttrice (che è $y=-2$ E NON $x=-2$!!)

$\left\{ \overset{x}{-\dfrac{b}{2a}} ; \overset{y}{\dfrac{1}{4a} - \dfrac{b^2-4ac}{4a}} \right\}$ (*)

La direttrice, invece, avrà per equazione: $\left\{ y = -\dfrac{1}{4a} - \dfrac{\Delta}{4a} \right\}$; POSSIAMO PERTANTO CREARE IL N/S SISTEMA:

$$\begin{cases} -b/2a = 1 \\ 1/4a - \dfrac{b^2-4ac}{4a} = -3 \\ -2 = -\dfrac{1}{4a} - \dfrac{b^2-4ac}{4a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 1-b^2+4ac = -12a \\ -8a = -1-b^2+4ac \end{cases} \Rightarrow$$

SEGUE A PAG. 4

Segue sviluppo sistema esercizio n° 4 : ⇒

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\cancel{4a^2}+1+\cancel{4a^2}-8a=-12a \Rightarrow 2=-12a+8a \\ b=-2a \\ -4ac=-1-4a^2+8a \Rightarrow 4ac=1+4a^2-8a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2=-4a \Rightarrow 4a=-2 \Rightarrow a=-2/4=-1/2 \\ b=-2\cdot -1/2=1 \\ 4ac=1+4\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\cancel{8}^{4}\left(-1/\cancel{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \text{sviluppo la 3° eguaglianza}$$

$$4ac=1+\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}+4=1+1+4=6$$

$$4ac=6 \Rightarrow \cancel{4}^{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot c=6 \Rightarrow -\cancel{2}c=\cancel{6}^{3} \Rightarrow c=-3$$

Poiché l'equazione generica della parabola è $y=ax^2+bx+c$ la sua equazione specifica con fuoco $F(1;-3)$ e direttrice $y=-2$, sarà: $y=-\frac{1}{2}x^2+x-3$

Le coordinate del vertice, allora, saranno: $\left(-b/2a\,;\,-\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{\cancel{2}(-1/\cancel{2})}\,;\,-\frac{1^2-\cancel{4}^{2}(-3)\cdot(-\frac{1}{\cancel{2}})}{\cancel{4}^{2}\cdot(-1/\cancel{2})}\right) \Rightarrow \left(1\,;\,\frac{+5}{+2}\right)$$

Da cui ricavo l'equazione generica della retta:

$$(y-y_1)=m(x-x_1) \Rightarrow \left(y-\frac{5}{2}\right)=m(x-1) \Rightarrow$$

$2y-5=2m(x-1)$ che metto a sistema con la parabola alla ricerca di 2 soluzioni coincidenti per $\Delta=0$ ⇒

Le soluzioni possono essere:
- 2 soluzioni distinte ⇒ ∅ secante
- 2 soluzioni reali coincidenti ⇒ $\frac{0}{0}$ t.g.te ✓
- 2 soluzioni immaginarie ⇒ esterna ✓/

$$\begin{cases} 2y-5=2m(x-1) \\ y=-1/2\,x^2+x-3 \end{cases} \quad \text{e sostituendo la 2° nella 1°}$$

Prima di procedere, deduciamo subito che, poiché il vertice è positivo nel 1° quadrante anche m dovrà essere positivo e quindi scarteremo da subito eventuali soluzioni negative. L'intersezione tra parabola e retta mi permetterà di trovare m e il suo discriminante alla ricerca delle soluzioni dette sopra.

$$+2\left(-1/2\,x^2+x-3\right)-5-2mx+2m=0$$

$$-x^2+2x-6-5-2mx+2m=0 \Rightarrow x^2-2x+6+5+2mx-2m=0$$

$$x^2+2mx-2x+11-2m=0 \Rightarrow \underset{a}{x^2}+\underbrace{x(2m-2)}_{b}+\underbrace{11-2m}_{c}=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=0$$

$$4m^2-8m+4-4(-2m+11)=0 \Rightarrow m^2=10 \Rightarrow m=\sqrt{10} \Rightarrow 2y-5=2\sqrt{10}(x-1)$$

DUE RADICI REALI E COINCIDENTI ⇒ TG ⇒ ABBIAMO preso solo il valore > ∅ (+)