Intensità di interesse.

$$I(t, t+dt) = \underbrace{M(t+dt) - M(t)}_{c.i} = \Delta M_t \quad \text{perché su } M_t \Rightarrow \frac{\Delta M_t}{M_t} \cdot (M_t)$$

↳ c.i

equivale a $M_t \cdot \frac{M_{t+\Delta t} - M_t}{M_t} = C \cdot r \cdot \frac{C \cdot r_{t+\Delta t} - C \cdot r_t}{C \cdot r_t}$

$$\underset{c.i + c}{\frac{I(t, t+dt)}{M_t}} = M_t \cdot \frac{\cancel{c}(r_{t+\Delta t} - r_t)}{\cancel{c} \cdot r_t} = M_t \cdot \frac{r_{t+\Delta t} - r_t}{r_t} =$$

$$(*) = \frac{\Delta r_t}{r_t} \cdot M_t = M_t \cdot \frac{1}{r_t} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r_t}{dt} = \frac{M_t}{r_t} \cdot r'_t$$

La forza d'interesse $\cdot M(t)$

$$\lim_{dt \to 0} \frac{\Delta M(t)}{M_t \, dt} = \frac{1}{M_t} \underbrace{\lim_{dt \to 0} \frac{M(t+dt) - M(t)}{dt}}_{} = \frac{M'_t}{M_t} = \frac{r'_t}{r_t} = \delta$$

$$M'(t) = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = y' = m$$

misura la sensibilità della funzione r alle variazioni temporali e rappresenta l'interesse prodotto da un capitale unitario nell'intervallo di tempo dt.

La f. di interesse nel regime int semplice, diventa:

$$\delta_t = \frac{(1+it)'}{1+it} = \frac{1}{1+it} \quad \text{e nell'int composto: } \frac{\left(\overbrace{(1+i_t)^n}^{r}\right)'}{\underbrace{(1+i_t)^n}_{r}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^x = a^x \ln(a) \\ a^n = a^n \ln(a) \end{cases} \Rightarrow \frac{\cancel{(1+i_t)^n} \cdot \ln(1+i_t)}{\cancel{(1+i_t)^n}} = \ln(r) = \ln(1+i_t) =$$

$$(*) \; M_t \cdot \frac{1}{r_t} \lim \frac{\Delta r_t}{dt} = M_t \cdot \frac{r'_t}{r_t} = M_t \cdot \delta_t = M_t \cdot \frac{f'(t)}{f(t)}$$

significato: a parità di capitale disponibile in t e di intervallo di investimento Δt, maggiore è il valore della forza di interesse, per ogni t, maggiore è l'interesse prodotto tra t e $t+\Delta t$.

Ricordi?

$$\begin{cases} y - f(x_0) = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{m} (x - x_0) \\ y - y_1 = m(x - x_0) \\ y = mx + \underbrace{q}_{\substack{n \\ \emptyset}} \end{cases}$$

(CONVESSO = RICURVO ⇒ $y = x^2$ e $y = e^x$

∀ x AB ≥ al di sopra della $f(x)$

tempi

concavo

VA

$$C = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \underbrace{t_n (t_n + 1)}_{t^2+t}$$

« CONVEXITY formula »

Duration Modificata al quadrato -

(con i = TRES)

capitale versato / valore attuale rendita

CONVEXITY: è una misura della volatilità delle obbligazioni e si riferisce alla variazione della duration di un titolo a reddito fisso al variare del rendimento. Corrisponde alla y'' negativa del rapporto prezzo/rendimento dell'obbligazione. Per esempio se la duration di una obbligazione aumenta al diminuire del rendimento, la sua convessità risulta positiva.

Duration = durata media finanziaria di un titolo o media delle scadenze dei flussi del titolo o di un portafoglio di titoli.

Pertanto la convessità è una unità di misura del cambiamento della duration di una obbligazione derivante dalla variazione dei tassi di interesse (o: di un titolo a reddito fisso al variare del rendimento). In altre parole misura di quanto varia il prezzo di un titolo se i tassi d'interesse variano di un certo ammontare ⇒ TASSO di cambiamento della duration.

Le obbligazioni con convessità negativa hanno prezzi che tendono a salire meno e a scendere di più rispetto a quelle con convessità positiva.

La gran parte delle obbligazioni con cedola fissa e data di scadenza hanno una convessità positiva.

N.B. ⇒ Nella duration si considera il prezzo tel quel comprensivo degli interessi! —— Il corso secco è il prezzo ufficiale di un titolo obbligazionario ed è pari al prezzo tel quel meno il rateo maturato fino a quel momento (ossia gli interessi maturati) ⇒ pertanto il prezzo tel quel è il corso secco più gli interessi maturati fino a quel momento ed è il prezzo di riferimento per il calcolo dell'investimento totale.

Duration titoli obbligazionari ⇒ $D = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{F_k}{(1+TRES)^{t_k}} \cdot t_k}{P}$ } Σ flussi attualizzati / prezzo tel quel del titolo obbligazionario

{TRES = TASSO DI RENDIMENTO EFFETTIVO A SCADENZA di una obbligazione - }

o: $\frac{1}{P}$

Serve per calcolare il VA ovvero di un titolo con la seguente ⇒ $\underbrace{VA}_{\text{corso tel quel}} = \sum_{t=1} \dfrac{F_t}{(1+T_{RES})^t}$ -

Esempio: Si consideri una obbligazione a 3 anni che corrisponde al suo possessore tre cedole annue pari a 3€ per ogni 100€ di valore nominale il cui prezzo attuale (prezzo di emissione) sia pari a 98€ per ogni 100€ di valore nominale. Il Tres può essere calcolato risolvendo la:

$$98 = \frac{3}{(1+T_{res})^1} + \frac{3}{(1+T_{res})^2} + \frac{100+3}{(1+T_{res})^3} \Rightarrow T_{res} = 3{,}72\%$$ -

La duration è inversamente correlata al Tres: se i rendimenti sono maggiori (minori), la duration è minore (maggiore).
Inoltre la duration serve come indicatore per misurare il rischio del tasso di interesse di un titolo obbligazionario. Esso esprime il periodo necessario per rientrare dell'investimento effettuato o in altri termini il periodo per il quale si è esposti al rischio dei tassi di interesse. La duration modificata, invece, funge da moltiplicatore del movimento dei tassi d'interesse. In pratica permette di calcolare la variazione percentuale del prezzo di un titolo nell'ipotesi di un movimento parallelo e istantaneo dei tassi d'interesse. Ad esempio se i tassi d'interesse dovessero salire dal 3% al 5% il nostro titolo obbligazionario subirebbe una perdita tanto maggiore in funzione della sua duration, infatti un titolo con duration 10 (dove 10 è il periodo di tempo) avrebbe una perdita maggiore di un titolo con duration pari a 6 $\Rightarrow$ Quindi in un investimento in obbligazioni a tasso fisso maggiore il tempo, maggiore il rischio. Partendo dalla formula della duration $DM = \frac{D}{(1+r)}$ con $D = \frac{1}{P(0)} \cdot \sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{F_t}{(1+r)^t}$ (con $r = T_{res} \equiv i$) $\Rightarrow$ derivata parziale di $P(0)$ rispetto al tasso d'interesse r $= \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{P}{(1+r)} \cdot D \Rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta R} \cdot \frac{}{(1+r)} = \Delta P$

SEMIELASTICITÀ $= -\frac{1}{1+i} \cdot$ DURATION

Elasticità $\Rightarrow$

$\hookrightarrow \underbrace{i \cdot \text{semielasticità}}_{1° \text{ metodo}} = \underbrace{-\frac{i}{1+i} \cdot \text{duration}}_{2° \text{ metod.}}$

elasticità totale

L = semielasticità + elasticità.