« FABRIZIOMAX COPYRIGHT »

« FORZA D'INTERESSE O TASSO ISTANTANEO »

{MATEMATICA FINANZIARIA
DISPENSA UNIVERSITARIA}

$$M_t = C \cdot r_t = C \cdot (1+i)^t$$

$$M_{\Delta t} = C \cdot r_{\Delta t} = C \cdot (1+i)^{\Delta t}$$

$$M_{t+\Delta t} = C \cdot r_{t+\Delta t} = C \cdot (1+i)^{t+\Delta T}$$

$$M_{t+\Delta t} = M_t + M_{\Delta t} \Rightarrow -M_{\Delta T} = M_t - M_{t+\Delta t} \Rightarrow M_{\Delta T} = M_{t+\Delta t} - M_t$$

$$M_{\Delta T} = M_t \cdot \frac{M_{t+\Delta T} - M_t}{M_t} = C \cdot r_t \cdot \frac{C \cdot r_{t+\Delta T} - C \cdot r_t}{C \cdot r_t} = M_t \cdot \frac{r_{t+\Delta T} - r_t}{r_t}$$

Basandoci su $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x) \Rightarrow$ breve significato geometrico $\Rightarrow$ (*) « fig. 1 »

$$M_{\Delta T} = \frac{M_t}{r_t} \cdot \frac{r_{t+\Delta T} - r_t}{\Delta T} \cdot \Delta T$$ e al limite, per $\Delta T \to \phi \Rightarrow$

$$M_{\Delta T} = \frac{M_t}{r_t} \cdot \lim_{\Delta T \to 0} \frac{r_{t+\Delta T} - r_t}{\Delta t} \cdot \Delta T = \frac{M_t}{r_t} \cdot r'_t \, \Delta T = M_t \cdot \frac{r'_t}{r_t} \Delta T \Rightarrow$$

$$M_{\Delta T} = \frac{(1+i_t)'}{1+it} \cdot M_t \cdot \Delta t \Rightarrow \text{poichè } t = x \Rightarrow \frac{(0+i \cdot 1)}{1+it} \cdot M_t \cdot \Delta T = \frac{i}{1+it} M_t \Delta T = M_t \frac{i}{1+it} \Delta T$$

[1] Dove $\delta_t = \frac{r'_t}{r_t} =$

- $\frac{i}{1+it} \Rightarrow$ è il tasso istantaneo di interesse o forza d'interesse relativo alla legge di capitalizzazione considerata in funzione del tempo (t) –
  - interesse semplice –
- $\frac{\left((1+i)^t\right)'}{(1+i)^t} \Rightarrow$ Rientra in $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a \Rightarrow \frac{(1+i)^t \cdot \ln(1+i)}{(1+i)^t} = \ln(1+i)$
  - interesse composto –

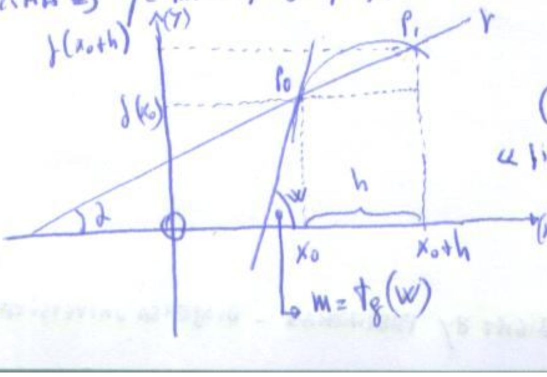
E per lo sconto commerciale ricordando: che $d = i/_{1+i}$ e che $r_t = \frac{1}{1-dt} = \frac{1}{1-\left(\frac{i}{1+i}\right) \cdot t} \Rightarrow$ e che $i_t = \frac{dt}{1-dt}$

$$\delta_t = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r'_t}{r_t} = \frac{\left(\frac{1}{1-dt}\right)'}{\left(\frac{1}{1-dt}\right)} \Rightarrow \left\{ \text{poichè se } y = \frac{f(x)}{g(x)}, \; y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2} \right\} \Rightarrow \frac{0 \cdot g(x) - (-d) \cdot 1}{(1-dt)^2} : \frac{1}{1-dt} = \frac{d}{(1-dt)^2} \cdot \cancel{(1-dt)} = \frac{d}{1-dt} \Rightarrow$$

$$\delta_t = \frac{d}{1-dt}, \text{ ossia } \delta_t = \frac{i/_{(1+i)}}{1-\left(i/_{1+i}\right) \cdot t} -$$

CONCLUSIONI: A PARITÀ DI CAPITALE DISPONIBILE IN t E DI INTERVALLO DI INVESTIMENTO ΔT, MAGGIORE È IL VALORE DELLA FORZA D'INTERESSE, PER OGNI t, MAGGIORE È l'interesse prodotto fra (t) e $(t+\Delta T) \Rightarrow$ ANALISI PUNTO PUNTO DELLA DERIVATA PRIMA $\Rightarrow y = mx + q \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow$

$$y - y_1 = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{= m \Rightarrow \text{ coefficiente angolare } = tg(w)} (x - x_1)$$



(*) « fig. 1 »

Infine, poichè $d \ln[f x] = \frac{f'(x)}{f(x)}$, possiamo esprimere δ_t come $= \ln(r_t)$ [2] $\Rightarrow \delta_t = \ln(1+it)$ –

GRAZIE ALLA [2], VICEVERSA, SI PUÒ DETERMINARE LA LEGGE DI CAPITALIZZAZIONE QUANDO SIA NOTA LA FUNZIONE CHE ESPRIME LA FORZA D'INTERESSE:

$$\int_0^t \delta_s \, ds = \left[\log_\varepsilon r_s\right]_0^t = \left\{ \underset{(t)}{f(b)} - \underset{(0)}{f(a)} \right\} = \ln r_t - \ln r_0 =$$ tenendo presente che $\underline{\underline{r_0 = 1}}$ =

$$\ln r_t - \ln 1 = \underline{\underline{\ln r_t}} -$$

Abbiamo, pertanto, ottenuto: $\int_0^t \delta_s \, ds = \ln r_t$ e ricordando le seguenti $\left\{ \begin{array}{l} a^c = b \\ \log_a b = c \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\overbrace{\ln r_t}^{(b)} = \underbrace{\int_0^t \delta_s \, ds}_{(c)} \Rightarrow \boxed{\varepsilon^{\int_0^t \delta_s ds} = r_t} \; [3]$$ e poiché $v = \dfrac{1}{r} \Rightarrow v_t = \dfrac{1}{r_t} \Rightarrow$

ε (a)

$$\frac{1}{\varepsilon^{\int_0^t \delta_s ds}} = v_t \Rightarrow \boxed{v_t = \varepsilon^{-\int_0^t \delta_s ds}} \; [4]$$

Ora, possiamo finalmente scrivere la formula della capitalizzazione esponenziale del montante $\Rightarrow$

$$M = C \cdot r \Rightarrow C \cdot r_t \Rightarrow M = C \cdot r_t = C \cdot \varepsilon^{\int_0^t \delta_s ds} \Rightarrow$$ che risolto, $\Rightarrow M = C \cdot \varepsilon^{\delta t}$

E ancora, poiché $\underbrace{\delta_t}_{(c)} = \ln(r_t)$ $\Rightarrow$ in notazione esponenziale diventa: $a^c = b \Rightarrow$

$\varepsilon^{\delta t} = r_t$; sostituendo r_t in $M = C \cdot r_t$, ancora una volta, avremo la seguente:

$M = C \cdot e^{\delta t}$, come volevasi dimostrare -!

Esercizio: Determinare il montante di un capitale pari ad € 2000 per t = 1,5 anni essendo note le seguenti funzioni delle forze di interesse: a) $\delta_t = \ln(1,05)$ e B) $\delta_t = 3t/40$ -

Si ponga $m = C \cdot f(t)$ - « SOLUZIONE »