$y = \frac{x^2-1}{2x-4} \equiv \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} \in \mathbb{R} \begin{cases} 2x-4 \neq 0 \\ g \neq 4 \\ x \neq 4/2 = 2 \end{cases}$ A.V.

x	y
1	0
-1	0
2	$\left\{\frac{4-1}{4-4}\right\}$ A.V.
-2	$\frac{4-1}{-12} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$

$y' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x) f(x)}{(g(x))^2} =$

$= \frac{2x(2x-4) - 2(x^2-1)}{(2x-4)^2} = \frac{4x^2-8x-2x^2+2}{(2x-4)^2} =$

$= \frac{2x^2-8x+2}{4x^2-16x+16} = \frac{2(x^2-4x+1)}{2(2x^2-8x+8)} = \frac{x^2-4x+1}{2x^2-8x+8}$

$y'' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2} = \frac{(2x-4)\cdot(2x^2-8x+8) - ((4x-8)(x^2-4x+1))}{(2x^2-8x+8)^2} =$

$= \frac{4x^3-16x^2+16x - 8x^2+32x-32 - (4x^3-16x^2+4x-8x^2+32x-8)}{(2x^2-8x+8)(2x^2-8x+8)} =$

$= \frac{4x^3-16x^2+16x-8x^2+32x-32-4x^3+16x^2-4x+8x^2-32x+8}{4x^4-16x^3+16x^2-16x^3+64x^2-64x+16x^2-64x+64} =$

$= \frac{+12x-24}{4x^4-32x^3+96x^2-128x+64} = \frac{4(3x-6)}{4(x^4-8x^3+24x^2-32x+16)} = \frac{3x-6}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}$ (*)

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di massimo relativo $+\cap-$

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di minimo relativo $-\cup+$

} Metodo delle derivate successive! (<< 2° METODO >>)

Se la derivata prima non fornisce max e minimi!

Se la derivata prima fornisce max e minimi!

Se la derivata seconda fornisce max e minimi!

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-4x+1}{2x^2-8x+8} = 0 \Rightarrow x^2-4x+1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{2(2 \pm \sqrt{2})}{2} = \begin{cases} 2+\sqrt{3} = 3{,}73 \\ 2-\sqrt{3} = 0{,}26 \end{cases}$

$2x^2-8x+8 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{4} = 2 \pm \sqrt{3}$

(*) $\frac{3\cdot 3{,}73 - 6}{(3{,}73)^4 - 8(3{,}73)^3 + 24(3{,}73)^2 - 32(3{,}73) + 16} = \frac{5{,}19}{193{,}56 - 415{,}16 + 333{,}8 - 118{,}36 + 16} = \frac{5{,}19}{+8{,}95} =$

$= + k > 0$ (MINIMO relativo)

(*) $\frac{3\cdot 0{,}26 - 6}{(0{,}26)^4 - 8(0{,}26)^3 + 24(0{,}26)^2 - 32\cdot 0{,}26 + 16} = \frac{-5{,}22}{9{,}16} = -0{,}56$

$\Rightarrow -k < 0 \Rightarrow$ (massimo relativo)

Se esiste A. obliquo non esiste quello Orizzontale $\Rightarrow$ dimostriamolo comunque e dimostriamolo con: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ (finito) $\Rightarrow$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{2x-4} = \infty/\infty \Rightarrow \frac{x^2\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{2x}{x} - \frac{4}{x}\right)} = \frac{x(1-0)}{2-0} = \frac{x}{2} = \infty/c = \infty \neq b$

Ricerca di flesso e tg verticale se:

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x^2-1}{2x-4} - \frac{4-1}{4-4}}{x-2} = \frac{+\infty - \infty}{0}$

$f''(x) \geq 0 \quad \frac{3x-6}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-6 > 0 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 6/3 > 2$

Sappiamo che il denominatore è un polinomio da cui estrarre x_2 grande ruffini

	1	-8	24	-32	16
2		2	-12	24	-16
	1	-6	12	-8	0

$(x^3-6x^2+12x-8)(x-2) > 0$

Lo si scrive per (2)

	1	-6	+12	-8
2		2	-8	8
	1	-4	4	Ø

$(x^2-4x+4)(x-2)\cdot(x-2) > 0$

$(x^2-4x+4)(x-2)^2 > 0$

$(x-2)^2(x-2)^2 > 0$

$(x-2)^4 > 0 \Rightarrow x > 2$

↳ verifica: $(x^2-4x+4)(x^2-4x+4) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x^3 + 16x^2 - 16x + 4x^2 - 16x + 16 =$

$= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$ ✓ come volevasi dimostrare

Se la y'' è positiva prima e negativa dopo ha un punto di flesso

" " " negativa " e positiva " " " "

" " " positiva " e positiva " sita un punto flesso

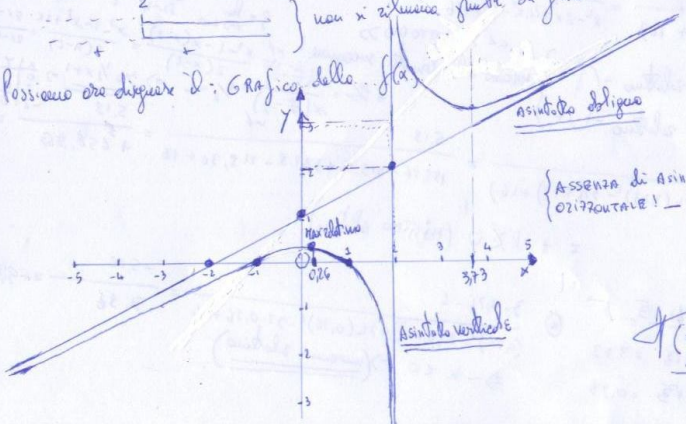
" " " negativa " e negativa " si ha un punto flesso

Perciò lo studio del segno della f'' è:

} non ci saranno punti di flesso!

Possiamo ora disegnare il: GRAFICO della $f(x)$

{ASSENZA di ASINTOTA ORIZZONTALE!}



(Fabrizio Copyright)