Nozioni di base sulle coniche (ellisse (x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1, iperbole(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1, parabola e circonferenza):

Delta =0, significa un solo punto di intersezione tra fascio di rette e conica

Delta >=0, significa 2 punti di intersezione (la retta è secante alla conica)

Delta <0, significa che non esistono intersezioni tra fascio e conica

Solo il fascio di rette proprio ha un centro del fascio.

Dato il fascio proprio 3y=mx-2, ossia mx=3y+2 le due rette generatrici del fascio in questione sono x=0 e 3y+2=0 con centro in (0;-2/3)

L'equazione di un fascio proprio è: y=m(k)x+q(k) ma può anche essere scritta come combinazione lineare di due rette generatrici del fascio, ossia come:

ax+by+c +k(ax+by+c)=0

Quella di un fascio improprio (che non ha ovviamente un centro del fascio) è: y=mx+q (ossia varia al variare di q)

Distanza tra due punti: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Il delta quarti viene usato quando il coefficiente dell'incognita di primo grado è un numero pari. Il delta quarti rende molto più semplici i calcoli.
Data l'equazione generica:
$ax^2+bx+c = 0$
Se b è un numero pari, si può usare la formula ridotta, quella con il delta quarti.
DELTA/4 = $(b/2)^2$ - ac
La formula ridotta è quindi:
x = (-b/2 ± √DELTA/4) / a

Esempio svolgimento equazione parametrica:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y + 2x + k = 0 \\ x \geq 0, \ y > 0 \end{cases}$$

Per prima cosa dobbiamo disegnare l'ellisse, poi mettere in evidenza l'arco del primo quadrante, che è quello che verifica le condizioni *x>=0;y>0*, adesso possiamo disegnare le rette del fascio che passano per gli estremi dell'arco (=0) e calcolare il valore corrispondente di k. Quindi cercare la tangente. Per trovare il k della tangente devi mettere a sistema ellisse e fascio e imporre che il delta dell'equazione di secondo grado sia nullo.

Pongo x=0 e y=0.

Infatti per x=0 y= +/-2 e prendendo solo i valori di y positivi come da sistema abbiamo 2+k=0 e quindi k=-2

E per y=0 x=+/-2 che sostituito nel fascio ci da (prendo solo x>=0): 2*2+k=0, ossia k=-4

Poi, per trovare la retta tangente ho usato il metodo di imposizione del delta=0, e ho trovato $k = \pm 2\sqrt{5}$. Ora da qui il libro (così come la prof) non sa spiegare come andare avanti. Tutto quello che ho capito è che devo trovare i valori di k per cui si ha 1 sola soluzione e quelli per cui se ne hanno 2, ma come si fa? I risultati sono:

1 soluzione per: $-4 \leq k \leq -2$

2 soluzioni per : $-2\sqrt{5} \leq k < -4$

Svolgimento:

In pratica devi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y + 2x + k = 0 \end{cases}$$

con vincolo $\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Dalla seconda equazione del primo sistema possiamo esprimere y in funzione di x:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -2x - k \end{cases}$$

Sostituiamo nella prima equazione

$$\begin{cases} x^2 + (-2x - k)^2 = 4 \\ y = -2x - k \end{cases}$$

Facciamo i conti con la prima, che equazione di secondo grado (in questo caso detta *equazione risolvente*)

$$x^2 + 4x^2 + 4kx + k^2 - 4 = 0 \iff 5x^2 + 4kx + k^2 - 4 = 0$$

Calcoliamo il discriminate associato:

$$\Delta = 16k^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 4) = 80 - 4k^2$$

Per questioni teoriche e senza vincoli (posizioni tra una retta e una circonferenza) avremo:

1. se $\Delta < 0$ allora non abbiamo intersezioni tra la retta e la circonferenza (la retta è esterna alla circonferenza)

2. se $\Delta = 0$ abbiamo un unico punto di intersezione tra la retta e la circonferenza (la retta è tangente alla circonferenza)

3. se $\Delta > 0$ abbiamo due punti di intersezione (la retta è secante alla circonferenza)

Ora però noi abbiamo il vincolo che ci crea un po' di problemi, non perdiamoci d'animo:

$$\Delta = 0 \iff 80 - 4k^2 = 0 \iff k = \pm 2\sqrt{5}$$

Dalla condizione

$$y + 2x + k = 0 \implies k = -y - 2x$$

e poiché $x \geq 0$e $y > 0$allora necessariamente $k < 0$

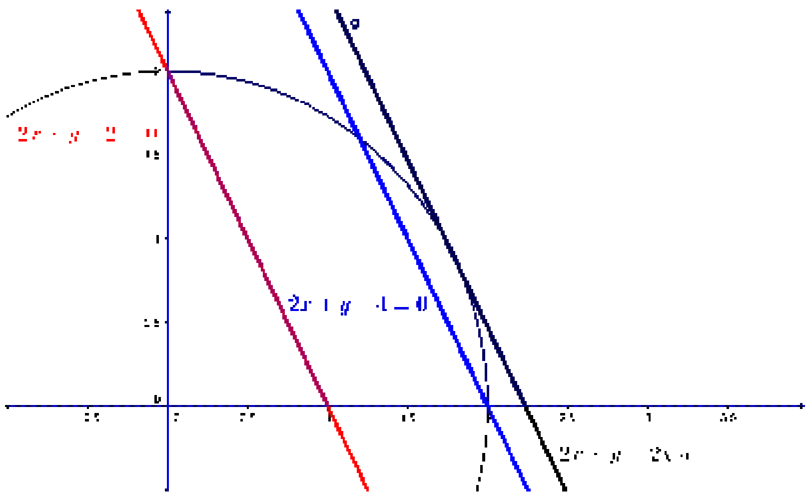
pertanto $\Delta = 0 \iff k = -2\sqrt{5}$(la soluzione con + deve essere scartata)

A questo punto per concludere immediatamente l'esercizio conviene passare all'**interpretazione grafica del problema**.

Hai già trovato i vincoli $k = -4$e $k = -2$che conducono alle rette:

$y + 2x - 4 = 0$e $y + 2x - 2 = 0$

A questo punto riporti tutto su un grafico



In nero la retta tangente di equazione

$$2x + y - 2\sqrt{5} = 0$$

in blu la retta secante $2x + y - 4 = 0$

In rosso la retta $2x + y - 2 = 0$

Ora un ragionamento tranquillo tranquillo. Il fascio di rette è un fascio improprio quindi descrive un fascio di rette parallele!

Tutte le rette comprese tra la retta tangente e la retta "blu" avranno due punti di intersezione, questa informazione si traduce come:

$$-2\sqrt{5} < k \leq -4$$

Inoltre tutte le rette comprese tra la retta "rossa" e la retta "blu" avranno invece un unico punto di intersezione, questa informazione si traduce analiticamente come:

$$-4 < k \leq -2$$

La retta tangente ha un punto di intersezione con la circonferenza quindi se $k = -2\sqrt{5}$abbiamo un unico punto di intersezione.

Altro Esempio (sistema parametrico circonferenza e fascio parametrico (parametro k) di rette):

x2+y2-6x-4y=0 (c=-a/2 ;-b/2)
(k+1)x+8ky-6k+2=0
x>0, y<=4

Rette generatrici e centro: kx+x+8ky-6k+2=0 ; x+2+k(x+8y-6)=0, ossia x+2=0 e x+8y-6=0, ossia x=-2 e 8y=8 da cui y=1 con centro in c(-2 ;1)
Arco di circonferenza interessato con centro nell'origine O(0;0), da cui: (k+1)0+8k*0-6k+2=0, 6k=2, **k=1/3**.
Per y=4 la circonferenza vale x2+16-6x-16=0; x2-6x=0, ossia x=0 e x=6. Da cui i punti: 0;4 e 6;4 di cui considero solo il secondo in quanto x>0.
P1(6:4). Da cui cui: (k+1)6+8k*4-6k+2=0, 6k+6+32k-6k+2=0, 32k=-8, **k= -1/4**.
La nostra circonferenza passerà anche in y=0; x2-6x=0; x=0 (che scarto) e x=6 (che accetto) e quindi P2(6;0)
Da cui cui: (k+1)6+8k*0-6k+2=0, 6k+6-6k+2=0, k=per qualunque valore della x>0=**k=+oo**.
Per determinare il senso di rotazione troviamo il coefficiente angolare con i nostri due valori di k=-1/4 e k=1/3:
(-1/4+1)x+8*-1/4y-6*-1/4+2=0, ossia: 3/4x-8/4y+6/4+2=0 che esplicitata in y diventa: 3x-8y+6+8=0, ossia -8y=-3x-14, y=3/8x+14/8 con m=3/8=0.375
(1/3+1)x+8*1/3y-6*1/3+2=0, ossia: 4/3x+8/3y-2+6=0 che esplicitata in y diventa: 4x+8y+4=0, ossia 8y=4x-4, y=1/2x-1/2 con m=1/2=0.5
Poiché i coefficienti sono diversi si tratta di un fascio proprio e non improprio (non sono parallele).
Se m=1=45° per cui se m=1/2=45°/22.5°. Se m=0.375, avremo m=45°*0.375=16.87°
Siamo passati da un angolo di 0.3 per k=-1/4 ad un angolo maggiore per k=1/3 pari a 0.5. Pertanto il senso di rotazione, al variare di k, è antiorario!
Cerchiamo ora la tangente alla circonferenza ponendo successivamente la condizione delta=0 o Delta/4=0:
(per i calcoli mi astengo in quanto vengono cose mostruose e non lo dico solo io!)

"y = kx + (4 - 6k)
la metto a sistema con la ellisse per trovare le due tangenti... e pongo DELTA=0
x² + 3 [kx + (4 - 6k)]² - 9 = 0

$x^2 + 3k^2x^2 + 6kx\ (4 - 6k) + (4 - 6k)^2 - 9 = 0$
$x^2\ (1 + 3k^2) + 6kx\ (4 - 6k) + (4 - 6k)^2 - 9 = 0$ . . . . EQUAZIONE RISOLVENTE (***)
poniamo DELTA/4 = 0
$9k^2\ (4 - 6k)^2 - (1 + 3k^2)\ [(4 - 6k)^2 - 9] = 0$
e menomale che ho affidato nuovamente i calcoli a Boris... perché vengono delle cose MOSTRUOSE..."

COME VERIFICARE SE UNA RETTA RISULTA ESTERNA, TANGENTE O SECANTE AD UNA PARABOLA

- **si risolve il sistema tra l'equazione della conica e l'equazione della retta**
- si trova una equazione di secondo grado della quale si trova il discriminante(DELTA)
- se DELTA < 0 allora la retta è esterna(nessun punto di intersezione);
- **se DELTA = 0 allora la retta è tangente(due punti di intersezione coincidenti);**
- se DELTA >0 allora la retta è secante(due punti di intersezione distinti).

Ricapitoliamo:

Il fascio ha centro in C(-2,1); le rette generatrici sono $x+2 = 0$ ($k = 0$) e $x+8y-6 = 0$ ($k = \infty$).
L'arco di circonferenza interessato è quello fra O(0,0) e B(6,4) nella parte che comprende il punto A(6,0).
La retta per A è quella con $k = \infty$.
La retta per O ha $k = 1/3$.
La retta per B ha $k = -1/4$.
Si capisce che, al variare di k, le rette girano in senso antiorario.
La retta tangente alla circonferenza, quella che interessa, l'altra è fuori... ha **$k = 3/13$ e tocca il punto T (1,-1).**
In conclusione:
Per $3/13 \leq k < 1/3$: 2 soluzioni (le rette intersecano due volte)
Per $1/3 \leq k$ fino a ∞ : 1 soluzione;
Per da $-\infty$ a $k \leq -1/4$: 1 soluzione.