

## I vettori

Grandezze **scalari** e grandezze **vettoriali**

**Vettore**: ente matematico caratterizzato da tre quantità

**modulo**

**direzione**

**verso**

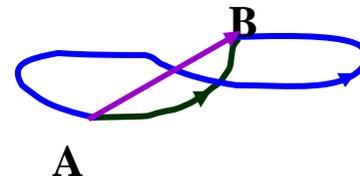
I vettori sono applicati in un punto (esiste un numero infinito di **vettori equipollenti**, cioè con modulo, direzione e verso uguali, ma applicati in punti diversi).

**Equazioni scalari**

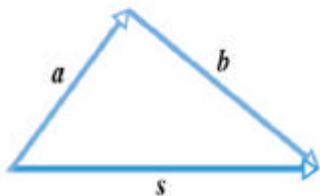
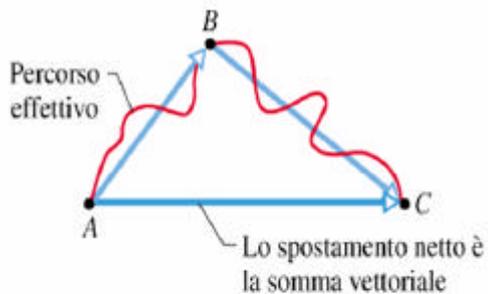
}

**non vanno mescolate**

**Equazioni vettoriali**



## Somma di vettori



Equazione vettoriale che definisce  
il **vettore somma**

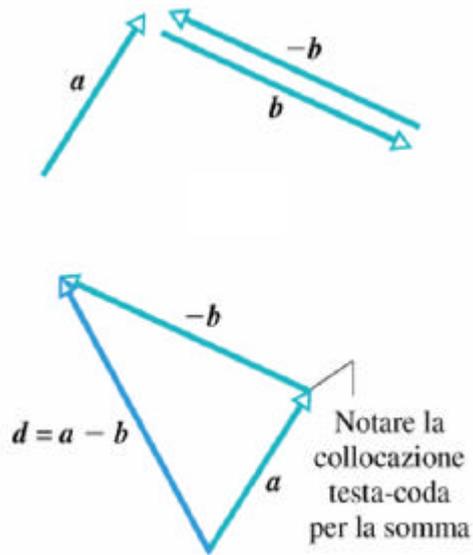
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

**Proprietà commutativa**

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

**Proprietà associativa**

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



$-\vec{b}$  è un vettore con modulo e direzione uguali al vettore  $\vec{b}$ , ma orientato in verso opposto, quindi

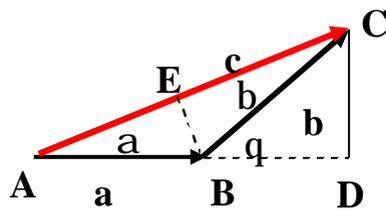
$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0$$

Possiamo ora definire la differenza di due vettori come la somma di un vettore con l'opposto dell'altro

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

## Calcolo del vettore somma



$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{DC})^2$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = a + b \cos q$$

$$\overline{DC} = b \sin J$$

$$c^2 = (a + b \cos q)^2 + b^2 \sin^2 q = a^2 + b^2 + 2ab \cos q$$

La direzione di  $\vec{c}$  è determinata dall'angolo  $\alpha$

$$c \sin \alpha = b \sin q$$

$$\frac{c}{\sin q} = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta}$$

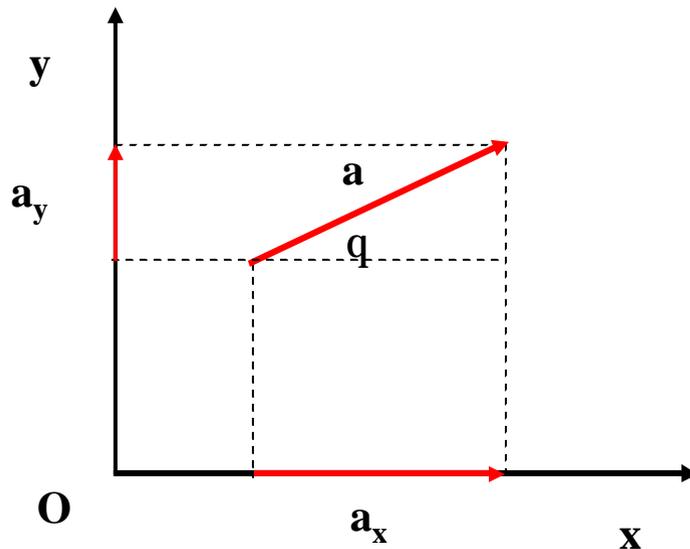
$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono  $\perp$

## Vettori e loro componenti

La **componente** di un vettore è la sua proiezione su un asse;  $\mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_y$ . **Scomposizione di un vettore.**

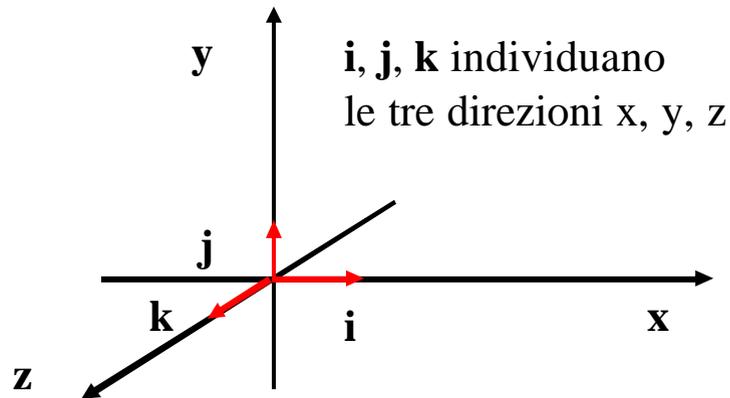


$$\begin{aligned}a_x &= a \cos q \\a_y &= a \sin q \\a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\tg q &= \frac{a_y}{a_x}\end{aligned}$$

## Vettori unitari

Un **vettore unitario** è detto **versore** ed è un vettore di **modulo = 1**, utilizzato per individuare una particolare direzione.

**Sistema destrorso di coordinate cartesiane ortogonali**



A volte vengono anche utilizzati i nomi  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$ ,  $\mathbf{u}_z$

## Prodotti di vettori

- Prodotto di un **vettore per uno scalare** → **vettore**
- **Prodotto tra vettori**

Prodotto **scalare** → **scalare**

Prodotto **vettoriale** → **vettore**

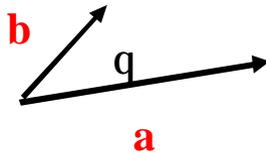
### Prodotto di un vettore per uno scalare

Moltiplicando un vettore **a** per uno scalare **s**, si ha un nuovo vettore **b**, multiplo di **a**, con direzione uguale a quella di **a** e verso determinato dal segno di **s**.

$$\mathbf{b} = s\mathbf{a}$$

## Prodotto scalare

Il prodotto scalare dei vettori **a** e **b** è uno scalare definito dall'espressione



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta$$

La scelta dell'angolo è irrilevante essendo  $\cos \theta$  uguale a  $\cos(2\pi - \theta)$ .

Il p. s. può essere visto come il prodotto del modulo del vettore **a** per la proiezione del vettore **b** lungo la direzione di **a** e viceversa.

**Perpendicolarità** di due vettori  $\rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  se  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

**Modulo** del vettore  $\rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$

**Non ha senso iterare** il prodotto scalare

**Proprietà commutativa**  $\rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

**Proprietà distributiva**  $\rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

Se  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \rightarrow$  (teorema di Carnot o del coseno)

$$\begin{aligned} c^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 + 2ab \cos q \end{aligned}$$

Possiamo ora esprimere un **vettore qualunque** come **somma delle sue componenti** secondo un dato sistema di riferimento

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

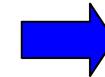
$a_x \vec{i}$ ,  $a_y \vec{j}$  e  $a_z \vec{k}$  sono dette **componenti vettoriali** di **a scalare** è invariante rispetto al sistema di riferimento  
**vettore** è invariante rispetto al sistema di riferimento

Le **componenti di un vettore non** sono invarianti

Esse non variano per traslazione, si trasformano per rotazione → non sono **né vettori né scalari\***

**Scelta arbitraria** del sistema di riferimento  
**Invarianza delle leggi fisiche**

Per la somma di due vettori **a** e **b** otteniamo



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$c_x = a_x + b_x$$
$$c_y = a_y + b_y$$
$$c_z = a_z + b_z$$

\*Le componenti sono dei veri e propri vettori quando sono visti di per sé, senza relazione con il vettore originario, come vedremo per il moto dei proiettili.

Infine, utilizzando le componenti, otteniamo

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x \vec{i} \cdot b_x \vec{i} + a_x \vec{i} \cdot b_y \vec{j} + a_x \vec{i} \cdot b_z \vec{k} + a_y \vec{j} \cdot b_x \vec{i} + a_y \vec{j} \cdot b_y \vec{j} + \\ &+ a_y \vec{j} \cdot b_z \vec{k} + a_z \vec{k} \cdot b_x \vec{i} + a_z \vec{k} \cdot b_y \vec{j} + a_z \vec{k} \cdot b_z \vec{k} = \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + \\ &a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + \\ &+ a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\end{aligned}$$

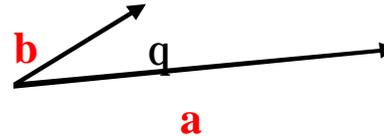
Quindi

$$\mathbf{a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

## Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale dei vettori **a** e **b** è un vettore **c** il cui modulo è definito dall'espressione

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta$$



La scelta dell'angolo è **rilevante** essendo  $\sin \theta = -\sin(2\pi - \theta)$ .

La **direzione** del vettore risultante **c** è determinata con la regola della **mano destra**:

il pollice coincide con il vettore **c**, l'indice con il vettore **a** e il medio con il vettore **b**. Il vettore risultante **c** è **sempre perpendicolare** al piano determinato dai vettori **a** e **b**

## Proprietà del prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale può essere visto come l'**area** del parallelogramma di lati **a** e **b** → **area può essere vista come un vettore**

**Parallelismo** di due vettori →  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$  se **a** è  $\parallel$  a **b**

**E' anticommutativo** →  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = - \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

**Proprietà distributiva** →  $\mathbf{a} \times \mathbf{R} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

**Proprietà associativa** →  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$   
quindi **ha senso iterare** il prodotto vettoriale, ma la **proprietà associativa non vale**.

Infine, utilizzando le componenti, otteniamo

$$\begin{aligned}
 \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\
 &= a_x \vec{i} \times b_x \vec{i} + a_x \vec{i} \times b_y \vec{j} + a_x \vec{i} \times b_z \vec{k} + a_y \vec{j} \times b_x \vec{i} + a_y \vec{j} \times b_y \vec{j} + \\
 &+ a_y \vec{j} \times b_z \vec{k} + a_z \vec{k} \times b_x \vec{i} + a_z \vec{k} \times b_y \vec{j} + a_z \vec{k} \times b_z \vec{k} = \\
 &= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} = \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}
 \end{aligned}$$

Infatti è

$$\begin{aligned}
 \vec{i} \times \vec{i} &= 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0 \\
 \vec{i} \times \vec{j} &= -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \\
 \vec{j} \times \vec{k} &= -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} \\
 \vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}
 \end{aligned}$$

Ovvero

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$