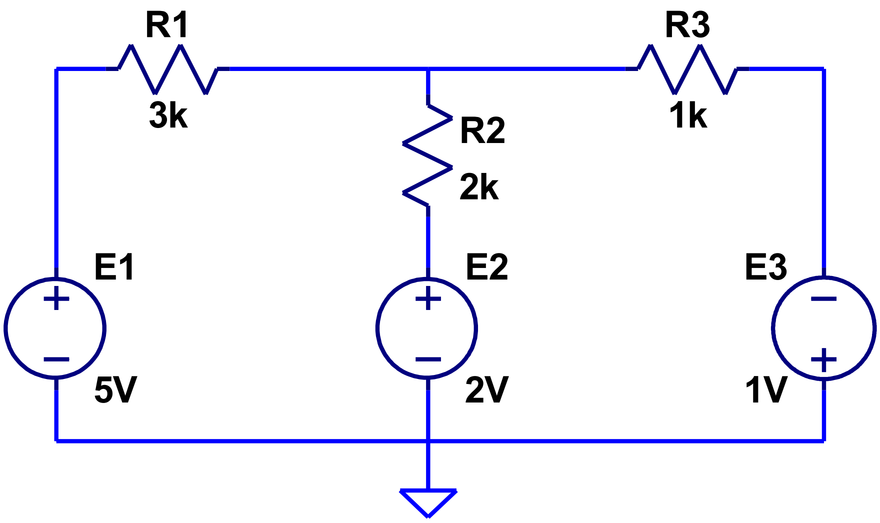
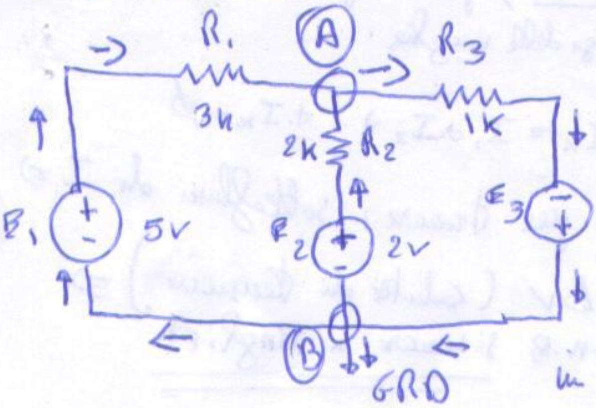
Esercizio 1

Dato il circuito di figura:

1. Mettere i nomi a ciascun nodo.
2. Identificare e indicare le correnti che scorrono nei vari rami del circuito.
3. Calcolare la resistenza equivalente a quelle indicate.
4. Calcolare le correnti che scorrono nelle resistenze e le tensioni ai loro capi.
5. Calcolare le differenze di potenziale tra ciascun nodo e la massa.
6. Calcolare le potenze dissipate da ciascuna resistenza e verificare l'equivalenza con la potenza erogata dal generatore.



Esercizio 1 Bis



DDP+ → a DDP−

senso orario.

in parte scarica a massa e in parte tornano gli e^- alle batterie E_1

Abbiamo:
- 3 maglie
- 3 batterie di cui una con la polarità invertita!
- 2 nodi A e B
- 3 Resistori o resistenze
- scarica a massa o GRD (GROUND)

Dobbiamo usare la legge di ohm generalizzata per poter trovare I (adesso c'è una vera batteria nel circuito!) ⇒

(*) $$I_{totale} = \frac{E_1 + E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3} \text{ (pag. 268 del libro) } = \frac{5V + 2V - 1V}{6k} = \frac{6V}{6k} =$$

$$= \frac{6V}{6000\,\Omega} = 0{,}001\,A = 1\,mA$$

↳ serve a trovare I totale nel circuito } alimentato da n generatori di DC

Potevamo anche fare come al solito con la seguente:

$R_{equivalente\ totale} \Rightarrow 5K + 2K - 1K = 6K$ (sono tutte in serie!)

$\underbrace{\Delta V_{tot}}_{\sum_{k=1}^{n} V_{in_k} = 6V} = R_{equivalente\ totale} \cdot I_{totale}$ ↳ (K) incognita $\Big\} \Rightarrow 6V = 6K \cdot K \Rightarrow K = \frac{6V}{6k} = \underline{1mA}$

come volevasi dimostrare_

(*) la Σ algebrica delle tensioni è uguale alla somma delle cadute ohmiche dell'intero circuito ⇒ $E_1 + E_2 - E_3 = R_1 \underline{I} + R_2 \underline{I} + R_3 \underline{I} \Rightarrow$

$E_1 + E_2 - E_3 = I(R_1 + R_2 + R_3) \Rightarrow$ mi trovo $I_{totale} = \frac{E_1 + E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3} \Rightarrow$

DA NON confondere (pag. 268) con pag 269 col II principio di Kirchhoff.
Dove non c'è I ma i sottoflussi di I ⇒ $I_1, I_2 .. I_n$

Applico ora il 2° principio di Kirchhoff KML, prima però ricordo (2)
che il 1° dice: ↳ legge delle maglie

1° principio → $\left\{ \begin{matrix} KNL \\ LKT \end{matrix} \right\}$ (legge delle tensioni) $\sum_{n=1}^{k} I_k = I_1 + I_2 + \dots + I_k = \emptyset$

2° principio → KML (legge delle maglie), serve per trovare i sottoflussi di I ⇒

la somma delle Fem è = alla somma delle ΔV (cadute di tensione) ⇒

<< Maglia A >> - n.B. si lavora x Maglie!

$$\begin{cases} I_2 = I + I_1 & (1° \text{ principio}) \\ E_1 + E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 & (2° \text{ principio di } k) \end{cases}$$

$I = I_2 + I_1 \Rightarrow I_2 + I_1 = I \quad I_2 = I - I_1$

$$\begin{cases} I_2 = I + I_1 \\ 7V = 3k \cdot I_1 + 2k\,(I + I_1) \Rightarrow 7V = 3kI_1 + 2kI + 2kI_1 \end{cases}$$

Essendo $I = 1mA$ ⇒

$7V = 3 \cdot 1000\Omega \cdot I_1 + 2 \cdot 1000\Omega \cdot 1mA + 2 \cdot 1000\Omega \cdot I_1$ e posto $I_1 = x$ ⇒

$7V = 3000\Omega \cdot x + 2000\Omega \cdot 1mA + 2000\, x \cdot \Omega$

$7V = 5000\Omega x + \cancel{2000}^{2}\Omega \cdot \frac{A}{\cancel{1000}}$

$7V - 5000\Omega x = -2\,(\Omega A)$

ricordiamo che $\Omega \cdot A = \text{Volts}$

$-5000\Omega x = -2V - 7V$

$-5000\Omega x = -5V \Rightarrow 5000\Omega x = 5V \Rightarrow x = \frac{5V}{5000\Omega}$ e ricordando

che V/Ω = Ampere ⇒ $x = \frac{5}{5000} \cdot \frac{V}{\Omega} = \frac{5}{5000} A = 1 \cdot 10^{-3} A = 10^{-3} A$

Pertanto: $\Delta V_1 = R_1 I_1 = 3k \cdot 10^{-3} A = \underbrace{3000 \boxed{\Omega} \cdot 10^{-3} \boxed{A}}_{\text{Volts}} = 3 \text{ volts}$

$\Delta V = 5V - 3V = 2V$

$\Delta V_2 = R_2 \cdot I_2 = 2k \cdot 10^{-3} A = 2000 \Omega \cdot 10^{-3} A = 2 \text{ volts}$

$\Delta V = 2V - 2V = 0$ Volts.

Vediamo ora la maglia (B) ⇒

Maglia B:

$$\begin{cases} E_2 - E_3 = R_3 I_3 + R_2 I_2 \\ I_2 = I - I_3 \quad \underline{\underline{\text{Vou}}} \end{cases} \quad \begin{cases} E_2 - E_3 = R_3 I_3 + R_2 (I - I_3) = \\ \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2V - 1V = R_3 I_3 + R_2 I - R_2 I_3 \Rightarrow$$

$$V = R_3 I_3 + R_2 I - R_2 I_3 \Rightarrow$$

$$V - R_3 I_3 - R_2 I + R_2 I_3 = 0$$

$$V - 1000\Omega \cdot I_3 - \cancel{2000}^{2}\,\Omega \cdot \frac{A}{\cancel{1000}} + 2000\Omega \cdot I_3 = 0$$

Ponendo $I_3 = x \Rightarrow$

$$\underline{V - 1000\Omega \cdot x} - \underbrace{2\boxed{\Omega A}}_{\text{Volts}} + \underline{2000\Omega x} = \emptyset$$

$$V + 1000\Omega x - 2V = 0 \Rightarrow -V + 1000\Omega x = \emptyset \Rightarrow 1000\Omega x = +V$$

$$\Rightarrow x = \frac{+V}{1000\Omega} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{V}{\Omega} = 10^{-3} \cdot A \ (I_3)$$

Pertanto $\Delta V_3 = R_3 \cdot I_3 = 1000\underbrace{\boxed{\Omega}\ 10^{-3}\boxed{A}}_{\text{Volts}} = 1 \text{ Volt}$

Poiché in ΔV_1 il DDP in era già sceso a 2 volt, avremo

una DDP di MODO pari a $2V - 1V = 1$ volt.

Controlliamo di nuovo ΔV_2, dovrebbe venire lo stesso valore trovato

nella maglia A $\Rightarrow$

$\Delta V_2 = R_2 \cdot I_3 = 2000\Omega \cdot 10^{-3} A = 2$ Volt (Identico al valore trovato con

i dati della maglia A, come volevasi dimostrare).

Calcoliamo adesso le potenze dissipate dalle varie resistenze (resistori) con

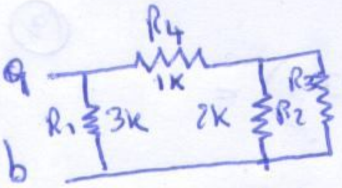
le seguenti (ricordando che $A^2 \cdot \Omega = \text{WATT}$) $\Rightarrow$

Potenza dissipata $R_1 = (I$ specifico in $R_1)^2 \cdot R$ specifico $= (1 \cdot 10^{-3} A)^2 \cdot 3000\Omega = 3 \cdot 10^{-3}$ W

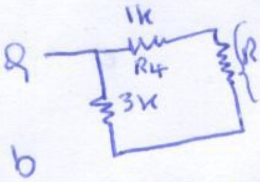
" " $R_2 = ($ " $R_2)^2 \cdot$ " $= (10^{-3} A)^2 \cdot 2000\Omega = 2 \cdot 10^{-3}$ W

" " $R_3 = ($ " $R_3)^2 \cdot$ " $= (10^{-3} A)^2 \cdot 1000\Omega = 10^{-3}$ W.

Vediamo ora un esempio su come calcolare la resistenza equivalente di un circuito sui generis $\Rightarrow$



⇒ lavoro in primis le $R_2 \parallel R_3$ in modo che lo schema si semplifichi in



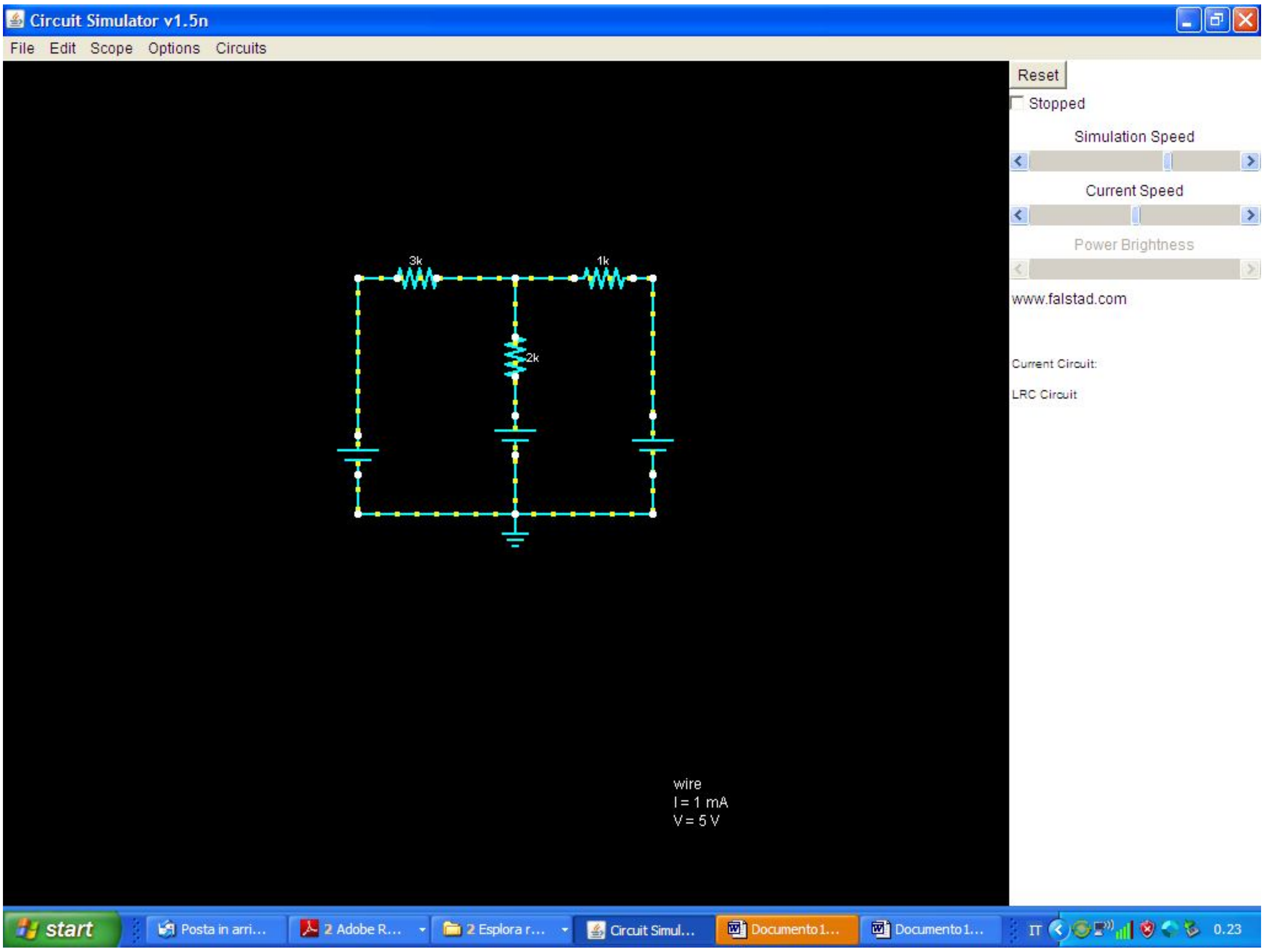
⇒ ossia} %

$$\frac{1}{\frac{1}{2k}+\frac{1}{1k}} = \frac{1}{\frac{1+2}{2k}} = \frac{2k}{3}$$, a cui aggiungo R_4 che si trova in serie

rispetto a quest'ultima ⇒ $\frac{2k}{3} + 1k = \frac{2k+3k}{3} = \frac{5k}{3}$ e ricavo la R_{totale} ⇒

Il valore trovato lo confronto in parallelo con 3k

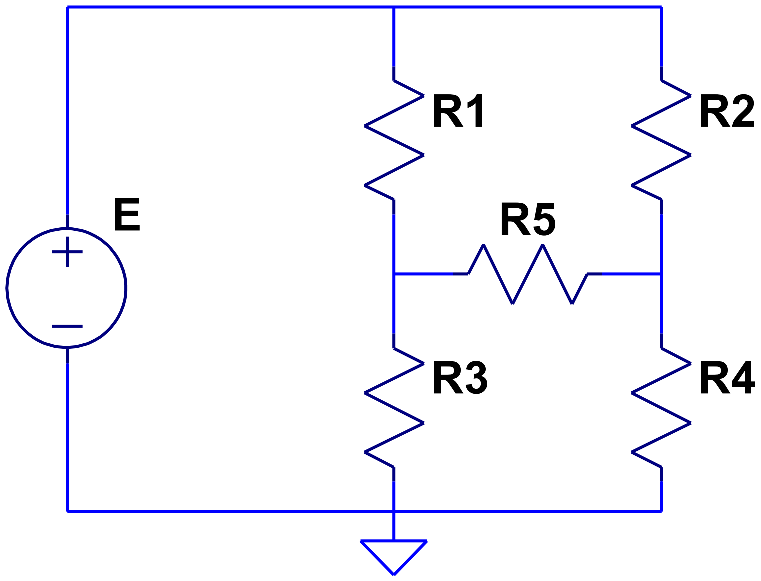
$$\frac{1}{\frac{1}{3k}+\frac{3}{5k}} = \frac{1}{\frac{5+3}{15k}} = \frac{15}{8}k$$

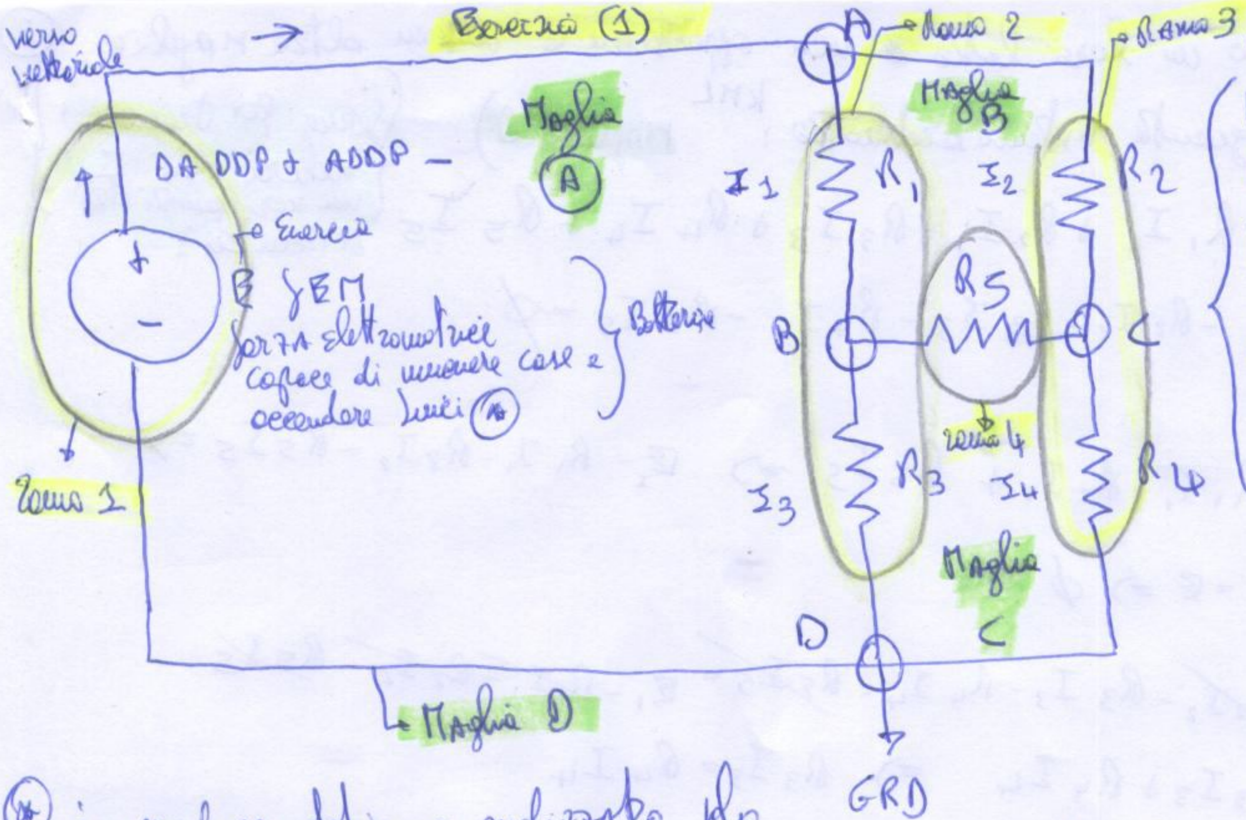

Circuit Simulator v1.5n
File Edit Scope Options Circuits
3k
1k
2k
wire
I = 1 mA
V = 5 V
Reset
Stopped
Simulation Speed
Current Speed
Power Brightness
www.falstad.com
Current Circuit:
LRC Circuit
start
Posta in arri...
2 Adobe R...
2 Esplora r...
Circuit Simul...
Documento1...
Documento1...
IT
0.23

Esercizio 1

Dato il circuito di figura:

1. Mettere i nomi a ciascun nodo.
2. Identificare e indicare le correnti che scorrono nei vari rami del circuito. Siano esse N.
3. Scrivere le equazioni di Kirchoff
    1. identificare i nodi con almeno tre componenti incidenti; siano essi N_3
    2. scegliere N_3-1 nodi e scrivere le corrispondenti leggi ai nodi (KNL)
    3. Scegliere N-(N_3-1) maglie indipendenti e scrivere le corripondenti leggi alle maglie (KML).
4. Scrivere il sistema ordinato
5. Scrivere le matrici del sistema.





ABBIAMO: (1)

4 nodi (A, B, C, D)

4 maglie

4 RAMI

1 FEM

ABBIAMO Anche: $\{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$ −

(*) in precedenza abbiamo analizzato solo schemi con DC + e terra (scarico e GROUND (−)) che non erano in grado di muovere motorini elettrici o accendere luci in quanto gli e^- venivano tutti scaricati a massa. Ora ci troviamo davanti alla presenza di I o + generatori di e^- (batterie) − In questo esercizio non serve mettere i valori numerici!

B e C hanno rispettivamente 3 componenti incidenti.

$\underbrace{\text{B e C}}$ → (R2 R4 R5)

L (R1 R3 R5)

D sembra avere 4 componenti incidenti come anche A ⇒ verificare col prof.

Se i Nodi sono $N=4 \Rightarrow N-(N_3-1) = 4-(\overbrace{3-1}^{2}) = \underline{\underline{2\ \text{nodi}}}$ ⇒ B e C con

ENNE 1° KLC

KML ⇒ o 1° principio di Kirchhoff ⇒ legge dei nodi

$$\begin{cases} I_3 = I_1 - I_5 \\ I_4 = I_2 - I_5 \end{cases}$$

flusso in I_1, flusso out (1) I_5, flusso out (2) I_3

$$\begin{cases} I_3 - I_1 + I_5 = 0 \\ I_1 - I_3 - I_5 = 0 \\ \sum_{k=1} I_k = 0 \end{cases}$$

Essendoci solo 1 FEM, applicando il 2° principio di Kirchhoff (KML) EMME PAG 263 libro legge delle maglie ⇒ la somma algebrica delle fem che agiscono in una maglia è uguale alla somma algebrica delle (ΔV) cadute di tensione ⇒ Calcolando se le nostre magli sono tra loro indipendenti,

Poiché almeno un loro lato non appartiene a nessun altra Maglie, (2)
avremo il seguente sistema ordinato: KML

Maglia (D) {Serve per trovare i valori di I nei vari punti del circuito!}

$$E = \int em = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5$$

$$E - R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 = \emptyset$$

Maglia B

$$\underbrace{E_1 = \int em_1}_{(?)} = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_5 I_5 \Rightarrow E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_5 I_5 = \emptyset$$

$(?) \Rightarrow E_1 = E \Rightarrow \emptyset$?

$$E - \cancel{R_1 I_1} - \cancel{R_2 I_2} - R_3 I_3 - R_4 I_4 - \cancel{R_5 I_5} = E_1 - \cancel{R_1 I_1} - \cancel{R_2 I_2} - \cancel{R_5 I_5}$$

$$\begin{cases} \overset{? \to \emptyset}{E - E_1} = R_3 I_3 + R_4 I_4 \Rightarrow R_3 I_3 = R_4 I_4 \\ \left.\begin{aligned} I_3 &= I_1 - I_5 \\ I_4 &= I_2 - I_5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &I_1 - I_5 = I_3 \Rightarrow I_5 = I_3 - I_1 \\ &I_4 = I_2 - I_3 + I_1 \end{aligned} \end{cases}$$

$$R_3 I_3 = R_4 (I_2 - I_3 + I_1) \Rightarrow \underline{R_3} I_3 - \underline{R_4} I_2 + \underline{R_4} I_3 - \underline{R_4} I_1 = 0$$

$\cancel{-E_1 - E_2 = E}$
$\cancel{E = E_1 + E_2}$

Maglia C

$$E_2 = \int em_2 = R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5$$

$$\emptyset \begin{cases} E_1 - E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + \cancel{R_5 I_5} - R_3 I_3 - R_4 I_4 - \cancel{R_5 I_5} \\ I_2 = I + I_1 \quad \text{e} \quad I_3 = I + I_2 = I + I + I_1 = 2I + I_1 \\ I_4 = I + I_3 \Rightarrow I_4 = I + 2I + I_1 = 3I + I_1 \end{cases} \text{con } E_1 = E_2 = \emptyset \text{ Risolubile}$$

<< I Bipoli elettrici >> E

N.B. classici bipoli elettrici sono le pile o batterie ⇒ Un qualsiasi dispositivo di rete elettrica caratterizzato dall'avere 2 terminali accessibili dall'esterno! Ottimi ⇒ generatori di tensione o di corrente (corrente alternata)

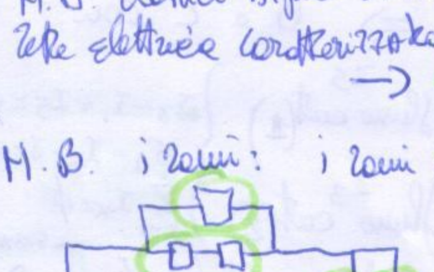
(Batterie a corrente continua)

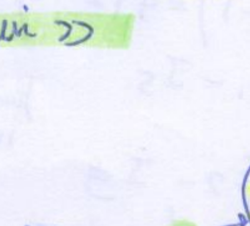
passivi: resistori, induttori, condensatori

resistenza

→ << I rami >>

N.B. i rami: i rami sono (5)





⇒ i rami sono 3

I rami sono la parte di rete compresa tra 2 nodi adiacenti ma anche Bipoli in serie sono un RAMO!

$L_A \begin{pmatrix} KML \\ \cancel{} \\ KLC \end{pmatrix}$ vuole che $A \cdot I = \phi$

↓

Matrice quadratica composta da n righe ed n colonne in cui le righe sono i Rami e le Colonne sono i nodi.

La matrice non è altro che una tabella Excel in cui le righe sono vettori con verso orizzontale e le colonne vettori unitari con verso verticale.

↓

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = \phi$$

Trovo la matrice A 4×4 quadratica regolare ⇒

TABELLA EXCEL — nodi rami.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline (A)\,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (B)\,2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (C)\,3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (D)\,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{vettore unitario (rami) e con } \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vettore unitario (nodi)

$$\boxed{A \cdot I = 0}$$

Risolvendo con il seguente sistema:

$$\begin{cases} I_1 \cdot 0 + I_1 \cdot 0 + I_1 \cdot 0 + I_1 \cdot 0 = 0 \\ I_2 \cdot 0 + I_2 \cdot 1 + I_2 \cdot 0 + I_2 \cdot 0 = 0 \\ I_3 \cdot 0 + I_3 \cdot 0 + I_3 \cdot 1 + I_3 \cdot 0 = 0 \\ I_4 \cdot 0 + I_4 \cdot 0 + I_4 \cdot 0 + I_4 \cdot 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_2 = 0 \\ I_3 = 0 \end{cases}$$

N.B: ⇒ SEGUE PARTE TEORICO/PRATICA SULLE MATRICI N·M e N·N ⇒

Definizione di determinante di una matrice quadrata n×n

E' dato dalla somma, fatta su tutte le permutazioni di n elementi (permutazione: è un modo di ordinare in successione n elementi o oggetti distinti, come anagrammare una parola: da "attore" a "teatro"), $(P(n)=n!)$ dei prodotti tra il segno della permutazione considerata e gli elementi di ogni riga (o di ogni colonna) riordinati secondo la permutazione stessa.

Ecco una matrice $m \cdot n$ (m righe ed n colonne) è una tabella (anche in Excel) del tipo seguente:

(DIAGONALE PRINCIPALE) (DIAGONALE SECONDARIA)

$$\begin{array}{c} m \\ \text{righe} \end{array} \left\| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h,1} & a_{h,2} & & a_{h,k} & & a_{h,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,k} & & a_{m,n} \end{matrix} \right\|$$

n colonne

Indici

→ vettore riga di elementi ordinati (MATRICE RIGA)

Con m ed n numeri naturali. Su essi si possono distinguere le righe e le colonne. È comune indicarla come $\|a_{h,k}\|$ o $(a_{h,k}) \Rightarrow$ (MATRICE n×m)

Se è quadrata ⇒ (MATRICE N×N)

vettore colonna di elementi ordinati ⇒ si dice anche (matrice colonna).

$\left\{ \begin{matrix} P(\text{"cinque"}) = P_6 = 6! = \\ = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \end{matrix} \right\}$ Permutazioni semplici!

Servono per analizzare un oggetto suddiviso in più componenti come ad esempio:

a) un insieme k di vettori nello spazio bidimensionale
b) le coordinate di k punti nello spazio a n dimensioni
c) un sistema di k equazioni ad n incognite
d) l'insieme delle possibili permutazioni su (n) oggetti.

Una matrice è quadrata se le righe sono uguali alle colonne. Spesso si parla di ordine di una matrice. Ad esempio. Se una matrice è di ordine 5, sempre quadrata, allora avrà 5 righe e 5 colonne! Il determinante è indicato Mentre la matrice viene indicata con una doppia barra con una barra singola: determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Prima di vedere come si calcola il determinante definiamo il complemento algebrico. Definiamo complemento $c_{h,k}$ di un elemento qualunque $a_{h,k}$ il determinante che si ottiene togliendo la riga e la colonna su cui si trova l'elemento in questione, ad esempio il complemento di $a_{2,2}$ di questa matrice

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cancel{a_{1,2}} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ \cancel{a_{2,1}} & \cancel{a_{2,2}} & \cancel{a_{2,3}} & \cancel{a_{2,4}} \\ a_{3,1} & \cancel{a_{3,2}} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & \cancel{a_{4,2}} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = c_{2,2} \text{ di } a_{2,2}$$

Eliminando riga e colonna di $a_{2,2}$

Definizione complemento algebrico $(-1)^{h+k} \cdot C_{h,k}$ di un elemento qualunque $a_{h,k}$ il determinante che si ottiene togliendo la riga e la colonna su cui si trova l'elemento in questione con il segno positivo se h+k = numero pari ed il segno negativo se h+k = numero dispari_ Per questa ragione si mette (-1) perchè se $(h+k)$ è pari eseguendo la potenza ottengo $(+1)$, mentre se $(h+k)$ è dispari, ottengo (-1)_ Nel caso visto C_{22} presenta la Σ degli indici pari a $2+2=4$ (pari) $\Rightarrow$ è positivo. Se avessi preso $a_{2,3} \Rightarrow 3+2=5 \Rightarrow$ dispari $= -a_{2,3}$

Calcolo del determinante in una matrice 2×2 quadratica $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = a_{1,1} \cdot C_{1,1} - a_{1,2} \cdot C_{1,2}$$

o se preferite:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c = ad - bc$$

Vediamo ora di estendere il metodo ad una matrice 3×3 $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \underbrace{+}_{(1+1)=2 \text{ pari} \Rightarrow +} \underbrace{a_{1,1}}_{} \cdot C_{11} \underbrace{-}_{} \underbrace{a_{1,2}}_{2+1=3 \text{ dispari} \Rightarrow (-)} \cdot C_{1,2} + \underbrace{a_{1,3}}_{(+)} \cdot \underbrace{C_{1,3}}_{3+1=4=\text{pari}} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{23} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{22} \\ a_{31} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Questo metodo, sarà applicabile, per ricorrenza a qualsiasi matrice quadrata N·N _

Esempio: Calcolare $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$

pari + dispari − pari +

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1[-2-1] - 2[4-1] +$$

$$+ 3[\underbrace{2-(-1)}_{2+1=3}] = -3 - 6 + 9 = -9 + 9 = \emptyset$$