Parte Prima => Testo:

Determinare il prodotto scalare e il prodotto vettoriale tra 2 vettori di modulo rispettivamente 2 e 3 formanti un angolo di 70° fra il primo e il secondo.

PAG. 1

Svolgimento:

Ricordando le definizioni di

Prodotto vettoriale: DATI 2 VETTORI $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il loro prodotto vettoriale $\vec{a} \wedge \vec{b}$ è un vettore che:

a) ha direzione perpendicolare $\perp$ al piano che contiene i 2 vettori (VECTOR) $\vec{a}$ e $\vec{b}$

b) ha verso dato dalla regola della mano destra (dx)

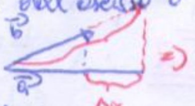
c) ha modulo uguale all'area del parallelogramma generato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

Ora considerato che se prendo come base il vettore $\vec{a} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{a \cdot b\perp}_{a \cdot \sin(\alpha)} \Rightarrow$

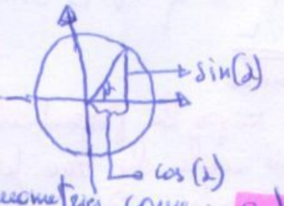
e se prendo come base il vettore $\vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{b \cdot a\perp}_{b \cdot \sin(\alpha)} \Rightarrow$

E quindi, in definitiva, trigonometricamente possiamo esprimere il prodotto vettoriale come $a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

E di prodotto scalare: si chiama prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$ tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il numero che si ottiene moltiplicando il modulo (lunghezza scalare) del primo per l'intensità (= modulo = scalare = grandezza fisica misurabile (Kg, metri, litri, etc)) del vettore componente (il corrispondente valore dell'ascissa o dell'ordinata del vettore preso a riferimento) (x) del secondo lungo il primo



=> Se incremento x, aumenta la lunghezza del modulo del vettore. (una delle 2 componenti del vettore) Stabilito che trigonometricamente in una circonferenza di raggio unitario



, sin = y e cos = x, viene naturale scrivere il prodotto scalare in termini trigonometrici come: $a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$

Dati del problema: $\begin{cases} a = 2 & \alpha = 70° \\ b = 3 \end{cases}$

Pertanto:

Modulo del prodotto vettoriale $= a \cdot b \cdot \sin(\alpha) = 2 \cdot 3 \cdot \sin(70°) = 6 \cdot 0{,}93 = 5{,}63$

Modulo del prodotto scalare $= a \cdot b \cdot \cos(\alpha) = 2 \cdot 3 \cdot \cos(70°) = 6 \cdot 0{,}34 = 2{,}052$

Parte seconda => Testo:

Un elettrone attraversa ortogonalmente (ossia perpendicolarmente, cioè con un angolo di 90°) alla velocità di $2 \cdot 10^5$ Km/s un campo magnetico di valore $B = 10^3$ T (TESLA). Determinare l'intensità e la direzione della forza di Lorentz che agisce su di esso. Fare un disegno esplicativo.

Svolgimento:

Per svolgere questo problema abbiamo bisogno di un dato nascosto, necessario alla soluzione del problema, ossia di quello relativo alla carica di un elettrone $\bar{e}$, pari a: $q_{e^-} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb.

Notiamo anche che per forza magnetica si fa riferimento alla forza elettromagnetica f.e. Inoltre dire interazione o forza è la stessa cosa. Infatti in natura ci sono 4 interazioni fondamentali:

1) Interazione o forza elettromagnetica => Elettroni
2) Interazione o forza gravitazionale => Gravitoni
3) Interazione o forza nucleare debole => bosoni o particelle di Dio
4) Interazione o forza nucleare forte => Quarks

DATI: $\begin{cases} q = \text{carica puntiforme in moto} \\ V = \text{velocità di } q \text{ (vettore)} \\ B = \text{valore vettore del campo magnetico} \\ T = \text{TESLA} \end{cases}$ $\vec{V}$ e $\vec{B}$, sono forze e quindi sono vettori!

→ Vediamo ora di comprendere a quanto equivale un Tesla ⇒

$$1 \text{ Tesla} = \frac{1 \text{ WEBER}}{1 m^2} = \frac{\text{WEBER}}{m^2} \Rightarrow \text{ poiché } 1 \text{ WEBER} = 1 \text{ volt} \cdot 1 \text{ secondo} \Rightarrow = \frac{V \cdot S}{m^2}$$

ma il Tesla può essere definito anche come:

$$1 \text{ TESLA} = \frac{1 \text{ NEWTON}}{1 \text{ Ampere} \cdot 1 \text{ metro}} = \frac{1 \text{ NEWTON}}{\frac{1 \text{ coulomb} \cdot 1 \text{ metro}}{1 \text{ secondo}}} = \frac{N}{\frac{C \cdot m}{S}} = N : \frac{C \cdot m}{S} = N \cdot \frac{S}{C \cdot m} = \frac{NS}{Cm}$$

Ricordiamo ora la formula che descrive il lavoro svolto dalla forza di Lorentz, ossia il lavoro svolto dal campo magnetico su, ad esempio, un elettrone!

$$\underset{\text{vettoriale}}{\vec{f}} = q \cdot \underbrace{\vec{V} \wedge \vec{B}}_{\text{prodotto vettoriale}} \quad ; \text{ (vector)}$$

bene, ma noi sappiamo da prima che il prodotto vettoriale può essere espresso trigonometricamente come $a \cdot b \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \overbrace{\underset{\text{scalare}}{f_L} = q \cdot V \cdot B \cdot \sin(\alpha)}^{1}$; ossia un risultato scalare e non più un risultato vettoriale.

Ricordiamo anche che il prodotto vettoriale implica sempre la perpendicolarità (ortogonalità) tra i vettori oggetto del prodotto vettoriale. Ricordiamo però anche che una forza ortogonale alla velocità non può mai eseguire alcun lavoro ⇒ $\begin{cases} L = \vec{f} \cdot \Delta S = \emptyset \\ L = f \cdot S \text{ (forza} \cdot \text{spostamento)} \end{cases}$ – Questo spiega il perché del fatto che un campo magnetico B può indurre solamente una variazione nella direzione del moto della particella senza con questo poter alterare il modulo della sua velocità.

Ricordiamo anche che un vettore ha tre caratteristiche fondamentali:

a) MODULO (lunghezza del vettore) b) direzione (angolazione del vettore) c) VERSO del vettore.

Le forze, sono vettori!

Ora il nostro problema è un caso un po' particolare. Si tratta infatti di una particella con carica (q) e massa (m) che si muove con velocità iniziale V in una regione in cui è presente un campo uniforme B (di valore pari a B), ortogonale a V. In tale specifico caso, infatti, il suo moto risulterà essere un moto circolare uniforme la cui accelerazione centripeta (quella cioè rivolta verso il centro diversamente da quella centrifuga che è rivolta all'esterno) sarà data da $a = F/m = \frac{q \cdot V \cdot B}{m}$ e poiché nel caso di forza centripeta l'accelerazione a vale V^2/R, sostituendo, avremo: $\frac{V^2}{R} = \frac{qVB}{m} \Rightarrow$

$$\frac{R}{V^2} = \frac{m}{qVB} \Rightarrow R = \frac{mV^2}{qVB} = \frac{mV}{qB}$$

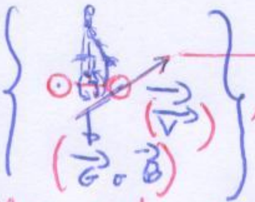
; formula che serve per trovare il raggio della nostra circonferenza generata dall'elettrone in circolo interno al nostro campo magnetico B.

Chiaramente, se la nostra particella non subisse deflessioni allora $F_L = \phi$, ossia il lavoro compiuto dal campo magnetico sul nostro elettrone sarebbe nullo o assente_

Ovviamente il raggio dell'orbita circolare percorsa dalla particella sarà direttamente proporzionale, come si evince da $R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$, ad m e V e inversamente proporzionale a q e B _

Un caso analogo:

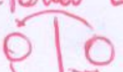
Si pensi alla bicicletta



vettore stabilità (90°), dove la gravità tende a far cadere bici e ciclista che deve poggiare almeno un piede a terra per non cadere mentre la velocità (maggiore è meglio è) tende invece ad impedire l'azione della gravità, come se dallo spazio bidimensionale nascesse una terza forza (tridimensionale) di stabilità perpendicolare alle due forze suddette_

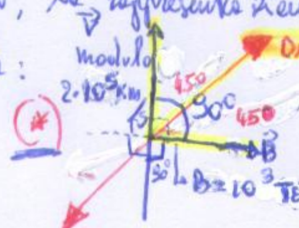
Ora se immaginiamo i pedali come se fossero elettroni che cercano di fuggire dal semiasse della bici ossia da $\vec{G}$ e con $\vec{v}$ la loro velocità di spinta (elevata ma non infinita) abbiamo dimostrato che gli elettroni, come i pedali, pur avendo molta energia non si staccheranno mai dal telaio della bici o se preferite dal campo magnetico B ma come i pedali del ciclista percorreranno orbite circolari anche nel caso che la bici andasse velocissima_

Si pensi al caso analogo della trottola o di 2 soli che orbitano intorno ad un asse fittizio generato unicamente da G e V delle loro specifiche masse =>



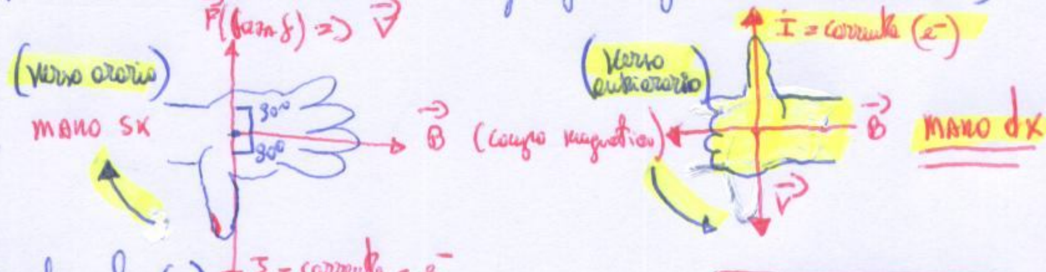
ASSE VETTORIALE IMMAGINARIO generato da $\vec{G}$ e $\vec{V}$ _

Pertanto, la rappresentazione grafica (generabile con l'ausilio di 3 penne) diventa:



=> forza di Lorentz e sua direzione (a DX) IN ALTO!

, la cui direzione è stata trovata applicando la regola della mano destra come si fa per il prodotto vettoriale =>



Adesso non mi resta altro che riprendere la (1)

$f_L = q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\alpha)$, con $\alpha = 90°$ e ricordando che il $\sin(90°) = 1$, abbiamo, in forma scalare che l'intensità (o modulo, o ancora valore) sarà dato dalla: $f_L = q \cdot v \cdot B$

dove $\begin{cases} q_{e^-} = 1,6 \cdot 10^{-19} C \\ B = 10^3 T \\ V = 2 \cdot 10^5 \ Km/s \end{cases}$ => sostituendo => $f_L = (1,6 \cdot 10^{-19} C)(2 \cdot 10^5 \ Km/s) \cdot (10^3 T) \cdot 1 =$

$= 3,2 \cdot 10^{-11} \cdot 10^3 \cancel{m}/\cancel{s} \cdot \cancel{C} \cdot \frac{N \cdot \cancel{s}}{\cancel{C} \cdot \cancel{m}} = 3,2 \cdot 10^{-8}$ Newton (come tutte le forze, anche quella di Lorentz, si misura in Newton!)_

N.B. $\left[1 \text{ Newton} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \right]$ _